

Um Software para o Problema das 8 Rainhas

José Ricardo R. Zeni

Departamento de Matemática (DMA) – Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Av. Dr. Ariberto Pereira da Cunha, 333 – 12.516.540 – Guaratinguetá – SP – Brazil

jrzeni@feg.unesp.br

Abstract. *This text presents a software to play and solve the Eighth Queen Problem. The user can control the dimension of the board, from 4x4 up to 8x8, adapting the difficulty level for his/her own capability. This text formulates the problem and discusses some mathematical subjects that can be exploited by it. At the end, it describes some experiences in classroom from elementary and middle school and also from the college, where this problem has been used as a pedagogical resource for the teaching and learning of mathematics.*

Resumo. *Neste texto, apresentamos um software para o problema das 8 Rainhas que permite ao usuário tanto jogar quanto visualizar todas as soluções do problema. O software também permite regular a dimensão do tabuleiro, do tamanho 4x4 até 8x8 (problema original), possibilitando ao usuário controlar o grau de dificuldade do problema. O texto apresenta o problema e discute como alguns conteúdos de matemática podem ser explorados com o mesmo. Também, são relatadas algumas experiências em sala de aula (ensino fundamental, médio e superior) onde este problema foi discutido e o software apresentado.*

1. Introdução

Nesta seção destacamos alguns pontos sobre a utilização de jogos e também das tecnologias da informação e comunicação (TIC's) como um recurso pedagógico. A seção 2 apresenta o problema das 8 rainhas; a seção 3 descreve os principais recursos do software; a seção 4 discute os conteúdos que podem ser explorados com este problema; a seção 5 apresenta relatos de uso do problema em sala de aula e a metodologia que tem sido utilizada. Por fim, a seção 6 apresenta as conclusões.

Nos últimos anos, tem havido um esforço por parte dos órgãos responsáveis pela educação (federal, estadual e municipal) para uma utilização sistemática de jogos e desafios em sala de aula. Orientações pedagógicas neste sentido podem ser vistas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's): "Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da Matemática." [Brasil, 1998, página 47].

A Secretaria de Estado da Educação (SEE-SP) tem estimulado esta abordagem, desenvolvendo softwares e textos didáticos para explorar jogos, [São Paulo, 1998]. Destacamos ainda o apoio a projetos nesta linha por parte das agências de pesquisa,

como por exemplo, a chamada pública 02/2006 MCT/FINEP/MEC “Jogos Eletrônicos Educacionais”, visando a produção e disseminação de jogos eletrônicos educacionais.

Usualmente, os enunciados dos jogos e desafios são bastante simples, acessíveis aos alunos, inclusive aqueles do ensino fundamental. Por outro lado, a participação nestes jogos requer concentração, cálculo mental e análise de possibilidades, sendo um verdadeiro desafio para os alunos. [Grando, 2000].

A utilização das TIC's nas escolas também tem sido objeto de atenção por parte destes órgãos. Segundo os PCN's, “a utilização de recursos como o computador e a calculadora podem contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica...”. [Brasil, 1998, pg. 45].

O problema das 8 Rainhas e o software correspondente tem sido utilizado com sucesso pelo autor deste artigo tanto no ensino superior, nas disciplinas de Análise Combinatória e também na disciplina de Álgebra, quanto em programas de formação continuada de professores de matemática do ensino fundamental e médio da rede pública, veja [Zeni, 2005]. Estes professores por sua vez, têm levado o jogado para a sua sala de aula, apresentando relatos positivos da atividade realizada, conforme discutido na seção 5 deste artigo.

O Problema das 8 Rainhas é um jogo solitário, sem adversários, do tipo quebra-cabeças, assim como os jogos Torre de Hanói e Quadrado Mágico. Ele não é um jogo de treinamento, isto é, não requer uma habilidade matemática específica para se jogar, como se requer em alguns jogos, como o Jogo do Resto ou Soma Zero, veja [Zeni, 2007]. Entretanto, além de desenvolver atitudes necessárias para a aprendizagem da matemática, o problema das 8 Rainhas permite explorar certos conteúdos matemáticos que se revelam após um olhar mais atento, conforme discutido na seção 4 deste artigo.

O software para o problema das 8 Rainhas e as metodologias para sua aplicação em sala de aula descritas neste artigo podem ser classificados como Instrução Auxiliada pelo Computador (em inglês, CAI), veja [Valente, 1989]. O software em particular, se destaca ao permitir ao usuário a experimentação (ao jogar) e também explorar a complexidade do conjunto de soluções (ao exibir todas as soluções).

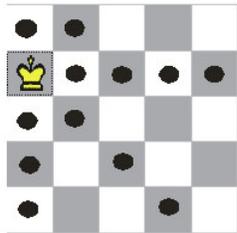
2. O problema das 8 Rainhas

O problema das 8 Rainhas é um problema famoso, cujos primeiros relatos datam do início do século XIX, estudado por Gauss e bem conhecido dos livros que tratam de combinatória ou matemática recreativa.

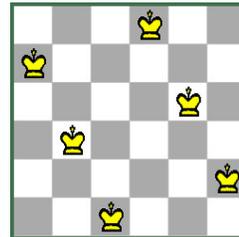
Formulação do problema: o problema das oito rainhas consiste em dispor 8 rainhas em um tabuleiro 8x8 de tal modo que elas não se ataquem.

No jogo de xadrez, as rainhas se atacam (ou se movimentam) tanto na horizontal quanto na vertical e também ao longo das diagonais, veja o diagrama da esquerda na figura 1 abaixo. Além das diagonais principais, deve-se considerar também as diagonais menores. Assim, o objetivo deste problema é colocar 8 rainhas no tabuleiro de modo que não se ataquem por nenhum destes caminhos (linhas, colunas ou diagonais).

Simplificações: devido à complexidade do problema e às inúmeras possibilidades que ele admite, é conveniente para o iniciante fazer algumas simplificações, diminuindo o tamanho do tabuleiro. Assim, podem ser usadas quatro rainhas num tabuleiro 4x4 ou cinco num tabuleiro 5x5 e assim por diante, a critério do jogador. O diagrama da direita na figura 1 abaixo mostra uma solução do problema das rainhas para um tabuleiro 6x6.



Casas que são atacadas por uma rainha.



Uma solução para um tabuleiro 6x6.

Figura 1. Exemplos iniciais.

3. Sobre o software

Este é um software executável para a plataforma Windows, foi desenvolvido no ambiente Delphi e tem uma interface gráfica com o usuário de boa qualidade. Ele é de fácil utilização, requer basicamente o uso do mouse, sendo acessível a pessoas que não têm quase nenhum conhecimento de informática. O software é gratuito e está disponível na internet. [Zeni, 2005, item “Aulas”, aula do dia 04 de junho].

Parte da tela inicial do software, mostrando o menu principal, é exibida na imagem à esquerda na figura 2 abaixo. Após selecionar o item “Soluções” ou o item “Jogar”, o usuário deve inicialmente escolher um tamanho para o tabuleiro, veja imagem à direita na figura 2.



Menu principal.



Botões para seleção do tabuleiro.

Figura 2. Parte das telas inicial (à esquerda) e do item “Jogar” (à direita).

No item “Jogar”, o software exibe um tabuleiro do tamanho selecionado, com uma linha adicional (cabecalho) contendo uma rainha para cada coluna, veja figura 3 abaixo. Para mover uma rainha, o usuário deve arrastá-la para a posição desejada.

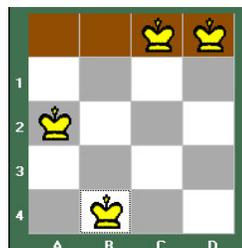


Figura 3. Parte da tela de “Jogar”, mostrando um tabuleiro 4x4 e duas rainhas posicionadas pelo usuário.

Retornando ao menu principal, o item “Soluções” permite que o usuário veja todas as soluções do problema para o tamanho selecionado. O software exibe o diagrama de uma solução (aquela que está selecionada na tabela) e também uma tabela com todas as soluções codificadas (a codificação será explicada na próxima seção), veja figura 4 abaixo. Para exibir o diagrama de outra solução, o usuário deve selecioná-la através do mouse ou das teclas de movimentação, ↓ e ↑.

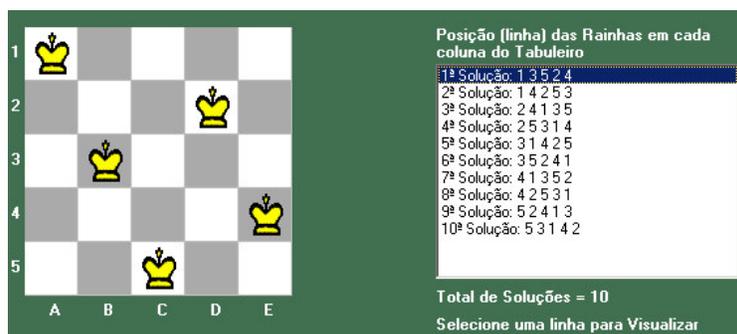


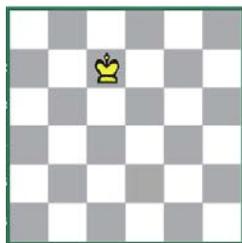
Figura 4. Parte da tela de “Soluções”, mostrando o diagrama de uma solução (a primeira solução) e a tabela com todas as soluções para um tabuleiro 5x5.

4. Explorando o problema das 8-Rainhas

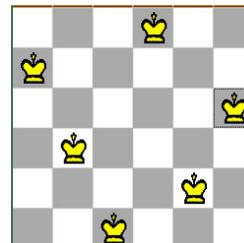
Nesta seção fazemos uma breve exposição de atividades que podem ser desenvolvidas com o problema das 8-Rainhas. Em [Zeni, 2005], no item “Aulas”, aula do dia 04 de junho, pode-se encontrar outros textos que descrevem estas atividades em maiores detalhes.

Problemas iniciais: inicialmente, podem ser apresentados (na lousa ou impresso) para os alunos alguns problemas relativos à movimentação das rainhas, conforme mostra o diagrama à esquerda na figura 5 abaixo (compare com a figura 1).

Em seguida, podem ser apresentados diagramas em que se pede aos alunos que verifiquem se são ou não soluções, veja diagrama à direita na figura 5 abaixo.



Marque as casas que são atacadas pela rainha.



Verifique se este diagrama é ou não uma solução.

Figura 5. Problemas Iniciais.

Depois, pode-se propor aos alunos a resolução do problema em si, iniciando com tabuleiros menores. Estas atividades desenvolvem no aluno a concentração, a experimentação e um “cálculo mental” (visão do tabuleiro) relativo a linhas, colunas e diagonais do tabuleiro.

Codificação das soluções: uma solução para um tabuleiro $n \times n$ pode ser representada por uma seqüência de n números, sendo que cada número representa a posição-linha (ou simplesmente, linha) de uma rainha no tabuleiro. O primeiro número da seqüência representa a linha da rainha que está na primeira coluna, o segundo número da seqüência representa a linha da rainha que está na segunda coluna e assim por diante. A figura 4, seção 3, exibe o diagrama da solução codificada pela seqüência (1, 3, 5, 2, 4), a primeira solução encontrada pelo sistema para um tabuleiro 5×5 .

Podem ser propostos aos alunos problemas de conversão (codificação e decodificação) entre as representações (diagramas e seqüências) das soluções, por exemplo, codifique a solução apresentada na figura 1. Ou então, desenhe os diagramas que representam as soluções codificadas na tabela da figura 4.

Simetrias: através das transformações de simetria do quadrado (tabuleiro) é possível obter outras soluções a partir de uma solução dada. As simetrias do quadrado são basicamente reflexões através de alguns eixos que passam pelo centro do quadrado (ditos eixos de simetria) e o dividem em duas partes iguais e também, algumas rotações ao redor do centro do quadrado. [Farmer, 1999].

Na figura 6 abaixo, o diagrama central representa uma solução para o problema das rainhas em um tabuleiro 5×5 . Neste diagrama, estão indicados dois eixos de simetria, horizontal e vertical. As transformações de simetria, neste caso, são as reflexões nestes eixos. Na mesma figura, o diagrama à esquerda representa a solução obtida a partir do diagrama central por reflexão no eixo horizontal, enquanto que o diagrama à direita representa a solução obtida por reflexão no eixo vertical.

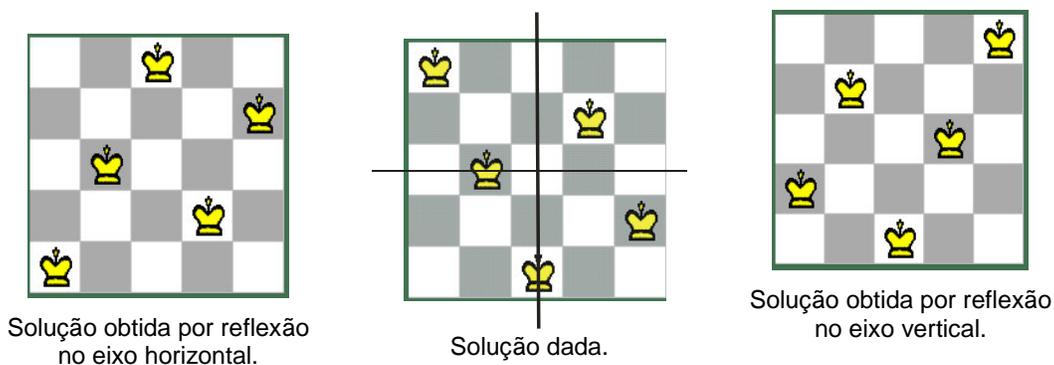


Figura 6. Soluções relacionadas por simetria de reflexão.

Além de problemas deste tipo (dada uma solução, determine outras soluções por reflexões nos eixos de simetria horizontal e vertical), pode-se pedir aos alunos para descrever outros eixos de simetria do quadrado e utilizar estas simetrias para obter outras soluções a partir de uma solução dada. Existem mais dois eixos de simetria do quadrado, correspondentes a diagonal principal e a diagonal secundária.

Análise Combinatória: ao tentar resolver o problema das rainhas por tentativa e erro, uma questão que se coloca é sobre o universo da busca que se tem a considerar, em outras palavras, a quantidade de diagramas (soluções ou não) que se deve analisar para encontrar todas as soluções. Este universo da busca depende do método e da estratégia considerada, conforme veremos a seguir.

Problema 1: quantas maneiras existem para colocar 8 rainhas no tabuleiro? Resposta: das 64 casas do tabuleiro deve-se escolher 8 casas distintas (não importa a ordem); o resultado é a combinação de 64 com 8, ou seja, $C(64, 8) = 4.426.165.368$, mais de 4 bilhões de possibilidades.

Problema 2: quantas maneiras existem para colocar 8 rainhas no tabuleiro com a restrição de que em cada coluna só tenha uma rainha? Resposta: o resultado segue do princípio multiplicativo e é igual a $8^8 = 16.777.216$, quase 17 milhões de possibilidades.

Problema 3: quantas maneiras existem para colocar 8 rainhas no tabuleiro com a restrição de que em cada coluna e em cada linha só tenha uma rainha? Resposta: para cada coluna, deve-se escolher uma linha dentre as oito possíveis, mas agora as linhas escolhidas em colunas diferentes devem ser diferentes. Assim, o resultado é a permutação das 8 linhas, que é igual a $8! = 40.320$, quase 40 mil possibilidades.

O algoritmo de busca do software, utilizado no item “Soluções”, é baseado no raciocínio do problema 3, um algoritmo para arranjos e permutações. Na prática, o usuário desenvolve intuição e estratégias que permitam encontrar algumas soluções sem ter que percorrer todas as possibilidades.

5. Relatos de uso do problema em sala de aula

Relatos de aulas em que o problema das 8-Rainhas foi apresentado, mostram que o problema desperta o interesse dos alunos. A busca por soluções desenvolve nos alunos a iniciativa, a criatividade e desperta a curiosidade, permitindo que se explore outros tópicos além do problema inicial.

A metodologia tem sido apresentar o problema das 8-Rainhas (como exposto na seção 2), propondo em seguida os problemas iniciais (veja seção 4), que podem ser feitos no caderno ou em material impresso (xerox). Depois, pode-se apresentar o jogo em formato artesanal e/ou no computador, deixando os alunos à vontade para tentar obter soluções. Depois disso pode-se discutir a codificação das soluções, conforme discutido na seção 4. O tempo para estas atividades é cerca de uma hora e meia (90 minutos), dependendo do nível de escolaridade da turma.

Conforme o interesse do grupo, pode-se discutir a questão da simetria de reflexões ou de análise combinatória (cerca de uma hora e meia para cada item). A discussão de simetria não necessita de pré-requisitos, os alunos têm uma noção intuitiva do assunto e aprendem rápido a realizar as atividades. Entretanto, a discussão de análise combinatória necessita que eles tenham tido algum contato com técnicas de contagem, em particular, com o princípio multiplicativo e de preferência com arranjos, permutações e combinações.

Formação continuada de professores do ensino fundamental e médio: nestes cursos, em que o autor deste artigo foi docente, a proposta de trabalho com o problema das 8-rainhas foi bem recebida pelos professores de modo geral, o que motivou alguns deles a levarem o problema para suas salas de aula.

Ensino fundamental, 5ª à 8ª série: relatos de professores que levaram o problema para sua sala de aula mostram que o problema é acessível aos alunos, que os mesmos se envolvem com ele e que este serve para desenvolver nos alunos atitudes necessárias para

a aprendizagem da matemática. A codificação das soluções e análise de simetrias podem ser absorvidas por estes alunos.

Ensino médio: os professores que trabalharam com este problema no ensino médio tinham por objetivo uma introdução a matrizes (feita usualmente no 1º ano). Não houve relatos de professores que abordaram a questão de combinatória através deste problema, talvez porque combinatória seja usualmente abordada apenas no fim do 3º ano do EM.

Ensino superior: o autor deste artigo trabalhou com este problema na disciplina de Análise Combinatória, no curso de Ciência da Computação, explorando os problemas descritos na seção 3. Em particular, esta versão do software foi desenvolvida nesta disciplina no ano de 2003 por um aluno deste curso, orientado pelo autor deste artigo.

Também, o autor abordou este problema na disciplina de Álgebra no curso de Matemática. As simetrias do quadrado formam um total de oito operações (4 reflexões e 4 rotações, incluindo a identidade) que constituem um grupo: o grupo diedral D_8 . A questão das simetrias foi utilizada como uma introdução à teoria de grupos, em particular, como uma preliminar à apresentação formal dos grupos diedrais que são grupos de simetrias dos polígonos regulares. Esta formalização pode ser vista em [Domingues e Iezzi, 1982, pg. 85 a 88]. Além disso, a utilização das simetrias para construção de outras soluções é uma aplicação da teoria de grupos.

Este problema também pode ser apresentado nas disciplinas de programação e/ou estruturas de dados do curso de Ciência da Computação. O problema permite explorar as estruturas de repetição e condicional e variáveis desde as mais simples, como vetores e matrizes, até mais avançadas, como grafos, veja [Wirth, 1986] e [Boaventura Netto, 2001, pg. 121].

6. Conclusão

O problema das 8 Rainhas permite o desenvolvimento de várias habilidades necessárias a aprendizagem matemática, tais como a concentração e a experimentação, e permite também explorar alguns conteúdos matemáticos, abrangendo diferentes níveis de escolaridade. A boa receptividade por parte dos alunos e o envolvimento demonstrado pelos mesmos, mostram que este problema merece um lugar no repertório de atividades dos professores. Uma possibilidade para pesquisa é explorar problemas semelhantes, desenvolvendo material, texto e software, explorando conteúdos matemáticos e observando suas aplicações em sala de aula, o que deve contribuir para a metodologia proposta e também fornecer indicações sobre a viabilidade ou não da atividade.

Em relação ao software, as vantagens de apresentar o jogo das 8-Rainhas no formato eletrônico são várias. Em relação ao item “Soluções”, mencionamos as seguintes vantagens:

(i) complexidade: ao exibir todas as soluções do problema, o software permite algo que não seria possível de se realizar com lápis e papel. Segundo [Russel e Norvig, 2004, pg. 88], por volta de 1850, Gauss encontrou apenas 42 soluções do problema.

(ii) fonte de informação: estas soluções podem ser analisadas de diversos ângulos, servindo de referências para outros tópicos, como por exemplo, a questão da codificação e das simetrias. Também, a visualização das soluções permite aos alunos levantarem questões por si mesmos.

Em relação ao item “Jogar”, destacamos

(iii) experimentação: o fato de jogar desenvolve no aluno a concentração, o cálculo mental (visão do tabuleiro), análise de possibilidades, a capacidade de antecipação e o desenvolvimento de estratégias que permitam resolver o problema.

Entre as desvantagens do jogo eletrônico, foi observado que no computador as ações são mais rápidas, o jogador se mostra mais ansioso em encontrar uma solução. Em particular, no jogo artesanal, ele tem de verificar a resposta por si próprio, enquanto que no formato eletrônico basta apertar um botão, o que contribui para reduzir o tempo de análise gasto pelo jogador.

Referências

- Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>, acessado em 26.02.2007.
- Boaventura Netto, Paulo Oswaldo (2001). *Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos*. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher.
- Domingues, Hygino H. e Iezzi, Gelson (1982). *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual.
- Farmer, David W. (1999) *Grupos e Simetria*. Lisboa: Gradiva.
- Grando, Regina Célia (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula*. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Educação, UNICAMP. Disponível em <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000223718>, acessado em 26.02.2007.
- Russel, Stuart e Norvig, Peter (2004). *Inteligência Artificial*. Rio de Janeiro: Campus.
- São Paulo (Estado, 1998). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências Matemáticas*. 4 volumes (5ª à 8ª série). São Paulo: SE/CENP.
- Valente, José Armando (1989). *Questão do Software: Parâmetros para o Desenvolvimento de Software Educativo*. Memo N° 24. NIED (Núcleo de Informática Aplicada à Educação), UNICAMP, Campinas.
- Wirth, Nicklaus (1986). *Algoritmos e Estrutura de Dados*. Prentice Hall do Brasil.
- Zeni, José Ricardo R. (coordenador, 2005). *Metodologias de Ensino da Matemática no Ciclo II do Ensino Fundamental*. Curso de Extensão. Programa de Formação Continuada de Professores Teia do Saber. Diretoria de Ensino da Região de Mirante do Paranapanema. Disponível em http://www.prudente.unesp.br/teia_zeni/index.php, acessado em 13.02.07.
- Zeni, José Ricardo R. (2007) *Quatro Jogos para o Ensino e Aprendizagem de Números e Operações no Ensino Fundamental*. Notas de Pesquisa, Guaratinguetá. Disponível em <http://www.feg.unesp.br/~jrzeni>, acessado em 01.03.2007.