

## A Representação do Conhecimento Geométrico e as Concepções de Professores de Matemática num Ambiente de Geometria Dinâmica

Emilia B. Ferreira<sup>1</sup>, Adriana B. Soares<sup>2</sup>, Cabral Lima<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática/NCE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)  
Caixa Postal 68.530 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

<sup>2</sup>Instituto de Matemática/NCE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)  
Caixa Postal 68.530 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

<sup>3</sup>Instituto de Matemática/NCE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)  
Caixa Postal 68.530 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

emiliabf@posgrad.nce.ufrj.br, absoares@posgrad.nce.ufrj.br,  
clima@nce.ufrj.br

**Abstract.** *This article presents results of a research about the continuous formation of Mathematics' teachers involving the use of new technologies. The investigation sought to place in discussion the contribution of the use of software of dynamic geometry in the teaching learning of the Geometry. The methodological procedures elapsed in an environment computerized with theoretical referential in researches developed by Piaget, Duval, Van Hiele, Balacheff. The obtained results suggest that the use of this software can aid in the development of the representations of the geometric knowledge and of the logical-deductive reasoning and, in a process of teachers' formation, stimulate the possible change in their pedagogic practice.*

**Resumo.** *Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa sobre a formação continuada de professores de Matemática, com o uso de novas tecnologias. A investigação objetivou discutir a contribuição do uso de softwares de geometria dinâmica, no ensino-aprendizagem da Geometria. Os procedimentos metodológicos transcorreram numa oficina em ambiente informatizado com referencial teórico em pesquisas desenvolvidas por Piaget, Duval, Van Hiele, Balacheff. Os resultados obtidos sugerem que o uso desses softwares pode ajudar no desenvolvimento das representações do conhecimento geométrico e do raciocínio lógico-dedutivo e, na formação de professores, estimular possível mudança nas suas práticas pedagógicas.*

## 1. Introdução

O conhecimento, no mundo de hoje, se constitui cada vez mais na matéria prima privilegiada de todas as áreas da atividade humana. Conseqüentemente cresce o papel da área especializada em conhecimento que é a educação. Com o aumento do volume de conhecimentos, novos instrumentos surgiram para organizar, acessar e transmiti-los: as tecnologias de comunicação e informação. Diante dessas duas novas realidades, a do universo de conhecimento e a das ferramentas de trabalho, a educação tem de estar atenta às suas responsabilidades e às suas necessidades de transformações. Para que a escola mude, é necessário que exista uma nova concepção de construção do conhecimento, uma nova forma de conceber a escola. O conhecimento exige, hoje, uma interação muito maior entre a escola e o seu espaço social. “A Universalidade da Computação”, temática do XXV Congresso da Sociedade Brasileira da Computação, especificada no WIE como “A Fronteira Tríplice entre Informática na Educação, Inclusão Digital e Inclusão Social” se volta para essa problemática promovendo discussões acerca de caminhos para sua solução. As novas tecnologias, ao facilitar a conectividade, podem se constituir, de um lado, numa ponte que colabore com esse necessário processo de integração, e, por outro lado, em instrumentos que criem condições favoráveis, na sala de aula, ao desenvolvimento de atividades intelectuais e sociais dos alunos.

Esta nova escola implica um novo modo de ser do professor, exigindo dele também uma formação atualizada pela qual possa ter, inclusive, a oportunidade de experimentar práticas bem sucedidas usando novos instrumentos tecnológicos, em especial o computador. Em relação aos professores de Matemática, nesse novo papel devem estar incluídas mudanças na sua visão da Matemática e de como ensiná-la. Diante destas questões, a presente pesquisa se volta para esta perspectiva. O estudo se desenvolveu em torno do ensino da Geometria pela sua importância na formação do aluno, pela sua natureza interdisciplinar e pela variedade dos recursos computacionais disponíveis para esta área.

Assim, neste trabalho, serão apresentados o processo e alguns resultados da pesquisa de campo desenvolvida com professores de Matemática num ambiente informatizado de Geometria Dinâmica (GD). A experiência faz parte de uma investigação que objetivou colocar em discussão a contribuição do uso de *software* de GD, particularmente o *Tabulae*, no ensino-aprendizagem da Geometria.

A hipótese é de que a utilização de ambientes de GD, no processo ensino-aprendizagem da Geometria, pode auxiliar na evolução dos níveis de pensamento geométrico dos professores envolvidos e no desenvolvimento de seu raciocínio lógico-dedutivo, através da promoção de uma melhor representação do conhecimento geométrico e do desenvolvimento da habilidade em demonstrar e resolver problemas geométricos. Assim, num processo de formação de professores, através de uma melhor representação do conhecimento, pode estimular uma reflexão sobre esses conceitos, sobre as demonstrações e o seu ensino de forma a estimular uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

## 2. Referencial Teórico

A investigação realizada nesse trabalho transcorreu num ambiente de GD. Esta denominação é dada aos ambientes computacionais interativos que disponibilizam régua e compasso virtuais permitindo a criação e a manipulação de figuras geométricas, a partir de suas propriedades. O programa utilizado foi o Tabulae [Belfort 2001], desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, por considerações de baixo custo, fácil disponibilidade e a compatibilidade com diferentes sistemas operacionais, por ser inteiramente escrito na linguagem Java.

Para um determinado objeto, devidamente construído, gera-se, com o “arrastar”, uma coleção de desenhos em movimento que vão revelando certos invariantes geométricos a esse mesmo objeto. O arrastar é um recurso específico dos ambientes de GD em que através do mouse clicando-se sobre um ponto do objeto construído é possível arrastá-lo pela tela, criando um movimento que provoca uma mudança em sua configuração.

A escolha desses ambientes, para a presente investigação, vem de encontro ao entendimento, inicialmente colocado, de uma proposta de Educação em que o conhecimento é resultado de um processo de construção. A teoria do desenvolvimento cognitivo de [Piaget 1983, 1990] constitui, assim, uma parte da base teórica do presente trabalho. Esta teoria mostra que toda aprendizagem depende fundamentalmente de ações coordenadas do sujeito, quer sejam de caráter concreto ou caráter abstrato. E, nos ambientes de GD, são destacados, à luz da teoria de Piaget, recursos que dão suporte as ações do sujeito e que conseqüentemente favorecem a construção do conhecimento matemático. Na aprendizagem da Matemática, este suporte relaciona-se à possibilidade de construir, experimentar, visualizar múltiplas configurações, generalizar, conjecturar e enfim demonstrar.

O processo de construção e a possibilidade de acesso a diferentes configurações da representação do objeto propiciam a adequada fusão entre as dimensões conceitual e figural constitutivos da situação geométrica, favorecendo, assim, a ascensão do patamar de conhecimentos, de empírico para o teórico. Em [Van Hiele 1986], para embasar nossos estudos, encontramos um modelo das fases de desenvolvimento do conhecimento geométrico que é um guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria. Este modelo apresenta cinco níveis de compreensão de acordo com as características do processo de pensamento dos estudantes. São eles: Visualização ou Reconhecimento, Análise, Dedução Informal ou Ordenação, Dedução Formal e Rigor.

Na tela do computador, manipulando os objetos, os alunos são motivados a questionar, conjecturar e testar. Assim, a necessidade de explicar as regularidades observadas pode ser uma conseqüência natural, se o trabalho for encaminhado nesta direção pelo professor. O engajamento no trabalho de construção de demonstrações será, então, uma nova etapa a ser vencida. Adotou-se, segundo [Balacheff 1982, 1997], que a demonstração deve ser vista como uma atividade do pensamento que numa seqüência procura pesquisar as razões com a finalidade de adquirir uma explicação ou uma convicção, através da argumentação, buscando produzir um discurso que convença aos outros. É, portanto, uma atividade complexa do raciocínio em que intervêm capacidades cognitivas, metodológicas e lingüísticas.

A demonstração é, por excelência, a parte da Matemática que exige uma coordenação dos tratamentos ao registro das figuras e ao discurso teórico na língua natural. Reportamo-nos a [Duval 1993] para uma melhor compreensão dos processos de representação. Segundo este autor, a utilização de diferentes registros de representação semiótica é um dos grandes problemas ligados à aprendizagem da Geometria. Ele define como semióticas as representações externas e conscientes, constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação (figuras, esquemas, expressões lingüísticas). Duval afirma, ainda, que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento, sem recorrer à noção de representação, pois não há conhecimento que possa ser mobilizado sem uma atividade de representação.

### 3. Metodologia

Ao se definir como objeto de estudo a utilização de novas tecnologias na formação continuada de professores, é necessário estabelecer questões a serem respondidas enfatizando-se a relação educação/tecnologias. Assim as questões que norteiam essa investigação são: Como os professores constroem seus conhecimentos geométricos? Como favorecer a evolução do nível de pensamento geométrico do visual para o formal? Qual a concepção que os professores têm sobre as demonstrações geométricas? As concepções dos professores em relação às demonstrações e ao seu ensino podem sofrer mudanças ao longo do processo de formação? Que características, desse processo de formação, permitem aos professores rever suas concepções e suas práticas pedagógicas e, em alguns casos, até reconstruí-las?

Com base no referencial teórico estabelecido e buscando responder às perguntas emergentes ao problema, foi organizada uma oficina de formação para professores, compreendendo: testes (pré e pós) elaborados pela equipe do Projeto Fundão, segundo o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, em [Projeto Fundão 2000]; oficinas em ambiente informatizado usando o *software Tabulae* e tendo como eixos de trabalho o enriquecimento das representações mentais do conhecimento geométrico dos professores e o da sua habilidade em construir demonstrações; discussão de temas relativos ao assunto; elaboração, pelo professor, de uma atividade prática de ensino, em ambiente de GD, a ser aplicada com os alunos; aplicação facultativa (dependendo dos recursos da escola onde trabalha o professor) da atividade de ensino elaborada, com o devido acompanhamento deste pesquisador. Permeando as atividades na oficina, discussões foram promovidas acerca de assuntos relacionados ao trabalho com o propósito de promover, entre os professores participantes, uma reflexão sobre suas concepções e prática, buscando reformulações ou mudanças positivas, quando necessário. Foram temas de discussão: o pensamento lógico e o pensamento geométrico, a Geometria e o seu ensino, as concepções e a técnica das demonstrações, a geometria dinâmica, teorias da aprendizagem, o processo de solução de problemas.

A oficina constou de 12 seções de 90 min cada uma, perfazendo um total de 18 horas. Delas participaram oito professores da rede pública de Angra dos Reis que podem ser caracterizados conforme dados apresentados na Tabela 1. Os nomes mencionados são fictícios de maneira a preservar a identidade dos participantes.

**Tabela 1. Caracterização dos Professores Participantes**

Professor	Idade	Sexo	Tempo de Magistério	Ensina Geometria	Usa computador em aula	Usa demonstração em aula
Ana	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Álvaro	De 41 a 50	M	De 10 a 20	Sim	Não	Sim
Áurea	Mais de 50	F	De 5 a 10	Sim	Não	Sim
Com	Mais de 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Eli	Mais de 50	M	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Gui	De 31 a 40	M	De 2 a 5	Não	Não	Não
Lilá	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Rosa	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Sim	Sim

Os conteúdos trabalhados foram selecionados buscando uma abordagem a aspectos básicos da Geometria. São eles: circunferência, quadrado e triângulos: equiláteros, isósceles e retângulos. Através deles, e com o uso do *Tabulae*, foram exploradas a construção, a investigação de propriedades características, levantamento de conjecturas, elaboração de demonstrações, resolução de problemas.

O conteúdo da seqüência didática a ser elaborada para os alunos foi um tema livre, de acordo com o interesse e as conveniências do professor elaborador.

Os dados analisados foram coletados durante as seções e os instrumentos foram: testes (pré e pós) elaborados pela equipe de Matemática do Projeto Fundão/UFRJ, para diagnosticar os níveis de raciocínio em geometria antes e depois dos trabalhos propostos; questionário para obter informações sobre os participantes, permitindo traçar um perfil do grupo; fichas de atividades no laboratório, onde o professor fez registros do desenvolvimento de seu processo de resolução dos problemas, fornecendo dados específicos sobre suas dificuldades e avanços; fichas de avaliação das atividades realizadas e do trabalho como um todo, apresentando as impressões do professor sobre os mesmos, incluindo sugestões e críticas; roteiro da seqüência didática elaborada pelo professor, revelando o grau de influência dos trabalhos sobre sua visão acerca das demonstrações matemáticas; histórico do *Tabulae*, recurso próprio deste ambiente de GD que registra e fornece a seqüência de operações efetuadas pelo usuário, em função do tempo.

#### **4. Resultados**

De acordo com nossas hipóteses, o pré-teste constou de duas partes: uma referente ao desenvolvimento do pensamento geométrico e outra relacionada às concepções e prática de ensino dos professores em demonstrações. Esse material serviu para posterior comparação com os subsídios a serem obtidos nos respectivos pós-testes.

Para a avaliação do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes, utilizamos os testes de Van Hiele para os níveis: 2 (Análise), 3 (Dedução

Informal) e 4 (Dedução Formal) acrescidos de algumas questões específicas de construção de demonstrações que constituíram o quarto teste, denominado por nós o de nível “4a”. Nesta análise, uma questão para ser considerada correta deverá ser respondida de forma completamente satisfatória, isto é, não é considerado meio certo. Por outro lado, o acerto de três das cinco questões propostas em cada um dos três níveis avaliados (2, 3 e 4), permite considerar o sujeito como tendo atingido tal nível. Na avaliação do nível “4a”, o sujeito é considerado como tendo atingido o nível se acertar duas das três questões propostas.

Para verificar as concepções e prática de ensino dos professores, em relação às demonstrações, no momento inicial do processo, quatro questões do questionário informativo foram elaboradas nesse sentido.

A evolução de suas concepções acerca das demonstrações foi avaliada durante os trabalhos através: de observações, da análise do processo de resolução dos problemas propostos, da dinâmica utilizada na elaboração das atividades de aplicação para os alunos.

A análise dos dados obtidos nos mostra os seguintes resultados:

1º) Através da aplicação dos testes de Van Hiele (pré e pós), pode ser comparado o desempenho dos professores antes e depois dos trabalhos na oficina. Assim, podemos ver os resultados na Tabela 2:

**Tabela 2. Resultados dos testes de Van Hiele**

Professor	Pré-teste	Pós-teste
Ana	Nível 3	Nível 4
Álvaro	Nível 3	Nível 4
Aureci	Nível 2	Nível 4
Conceição	Nível 2	Nível 3
Eli	Nível 4	Nível 4
Guilherme	Nível 3	Nível 3
Lila	Nível 4	Nível 4
Rosa	Nível 4	Nível 4

Houve uma melhora sensível, para alguns, na mudança de nível de desenvolvimento de seu conhecimento geométrico. Dentre eles, um conseguiu passar do nível dois para o nível quatro. Para outros, não houve alteração expressa numa mudança de nível. A manutenção no nível quatro, em alguns casos, já era a proposta deste trabalho quando objetivava o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo aliado à habilidade de construir demonstrações. No cômputo geral, dois professores não atingiram o nível quatro, um se manteve no três e o outro avançou do dois para o três. É importante registrar que o do nível dois, trata-se de um professor sem formação universitária o que justifica, de certo modo, suas dificuldades e pode se considerar até mesmo um grande avanço, seu progresso ao nível três.

A experiência no ambiente de GD favorece, então, ao aluno se ver na posição de construir seu próprio conhecimento, preconizado pela teoria piagetiana. Tendo sob sua responsabilidade, durante os trabalhos, as ações, as formulações e as validações requeridas à resolução das questões propostas, seu potencial cognitivo entra em funcionamento. No transcorrer dos trabalhos, nesse novo ambiente, onde o objeto geométrico construído de acordo com suas propriedades revela-se sob a forma de variadas estâncias e em constante movimento, percebem-se avanços nos participantes em diversos aspectos: na visualização, na construção e na interpretação da figura geométrica, na compreensão do sentido e da necessidade da demonstração bem como na habilidade de construí-la. Assim, as atividades no ambiente de GD podem contribuir para a ascensão do patamar de conhecimento geométrico para o da dedução formal, conforme pretendido.

2º) As concepções e a prática dos professores envolvidos foram variáveis analisadas durante o processo através de seus depoimentos (nos questionários, nas fichas de avaliação), de seu interesse e desempenho na resolução de problemas geométricos e da elaboração de situações didáticas para seus alunos com eventual aplicação das mesmas.

Após os trabalhos no ambiente de GD, aliado às reflexões programadas, percebem-se nos depoimentos dos professores mudanças nas suas concepções acerca do conceito das demonstrações e de seu ensino. Há, de um modo geral, um novo olhar para as demonstrações, entendida agora como um processo e não simplesmente como um resultado. Processo esse que pode e deve ser desenvolvido paralela e gradativamente ao ensino da Geometria, com um formalismo adaptado aos níveis de desenvolvimento do aluno. Identificam o *software* de GD como um rico e eficiente recurso que vem contribuir para a efetivação de uma proposta de ensino que privilegia uma aprendizagem interativa e onde o sujeito é o agente maior de seu conhecimento. Reconhecem, no entanto, que a disponibilidade de tal recurso não é uma realidade na maioria das situações de escolas públicas, como é o caso de Angra dos Reis.

A natureza das atividades elaboradas pelos professores sugere, também, uma postura em relação à Matemática que busca propiciar aos alunos um ambiente de aprendizagem onde eles tenham oportunidade de investigar, de conjecturar, de experimentar, de redescobrir, de argumentar, de elaborar demonstrações. Sete professores do grupo conseguiram elaborar a atividade em questão e dois desses a aplicaram com seus alunos. A aplicação transcorreu de forma satisfatória e os respectivos assuntos, abordados em turmas do Ensino Fundamental, foram: variações na área de paralelogramos (8ª série) e propriedades das cevianas de um triângulo isósceles (7ª série).

## 5. Conclusões

A análise dos resultados revela que os ambientes de GD, aliados a um trabalho de discussão e reflexão sobre os elementos envolvidos no processo, podem contribuir para uma melhor representação do conhecimento geométrico e para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Confirma, também, a hipótese de que uma melhor compreensão conceitual do conteúdo, acompanhada da prática de novas abordagens desse mesmo conteúdo pode agir positivamente sobre as concepções do professor com influência na sua prática pedagógica.

Voltando às questões mencionadas no item três deste artigo, apresentamos as respostas que os resultados da pesquisa sugerem para elas:

a) Como os professores constroem seus conhecimentos geométricos? b) Como favorecer a evolução do nível de pensamento geométrico do visual para a formal?

Assim, como propõe o construtivismo, a construção e a evolução do conhecimento ocorrem através da ação, investigação, exploração e descoberta e esses sistemas de GD servem de suporte às concretizações e às ações mentais dos alunos, devido à materialização da representação de objetos geométricos na tela do computador e à manipulação destes objetos [Gravina & Santarosa 1998].

c) Qual a concepção que os professores têm sobre as demonstrações geométricas? d) As concepções dos professores, em relação às demonstrações e ao seu ensino podem sofrer mudanças ao longo do processo de formação? e) Que características desse processo de formação permitem aos professores rever suas concepções e suas práticas pedagógicas e, em alguns casos, até reconstruí-las?

No depoimento inicial dos professores, percebe-se uma visão sobre a demonstração e seu ensino não correspondentes à expectativa de uma visão construtivista do ensino. Ela era vista, por eles, simplesmente como um conjunto de argumentos que valida determinada proposição, e é apresentada ao aluno como uma solução pronta e indiscutível. No desenrolar do trabalho, quando no papel de aluno experimentam vivenciar o processo de construção do conhecimento geométrico num ambiente de GD e onde foram enfatizadas trocas cognitivas no grupo, mudanças de visão do ensino da Matemática foram provocadas e percebidas.

Segundo [Ponte 1992], para que haja mudanças, é preciso que o professor queira mudar e, com base nessa vontade, são fatores desencadeantes de mudança: ver sua prática como problemática de estudo, participar de grupo que reflita sobre suas próprias práticas e ter a oportunidade de trabalhar as novas tecnologias no ensino.

De acordo com [Poletini 1996], a abordagem que mais contribui nos processos de mudança é a que integra conhecimento do conteúdo, de como lecionar o conteúdo e do currículo, pois fornece exemplos de atividade que os professores podem utilizar. O apoio próximo é decisivo no início do processo de mudança.

Nossa abordagem contempla as idéias desses autores, ao oferecermos aos participantes uma oportunidade de se capacitarem em conteúdos geométricos integrantes da grade curricular do Ensino Fundamental, através de métodos ativos apoiados na utilização de ambientes informatizados de GD que apresentam recursos em consonância com processo de aprendizagem construtivista. Por outro lado, a reflexão sobre sua prática e a troca de experiências com os outros também foi oportunizada.

A Educação e a Informática, alicerçadas na Psicologia Cognitiva, apesar de áreas distintas, podem e devem ser trabalhadas juntas, favorecendo resultados educacionais satisfatórios, pois a intencionalidade na aquisição de novos conhecimentos é um fator comum às três. A Informática, nesse caso, estaria não só atuando sobre o conhecimento, mas oferecendo novas ferramentas que auxiliem na aprendizagem, estimulando a construção do conhecimento e, particularmente, na Matemática, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e provocando mudanças de visão do ensino da Matemática.



## 6. Referências

- Balacheff, N. (1982) “Preuve et Demonstration en Mathématiques au College. Recherches en Didactique des Mathématiques au Collège”. Vol 3.3. La Pensée Sauvage Grenoble .
- Balacheff, N. (1997) “Processus de Preuve et Situations de Vakudatui”, Educational Studies in Mathematics, vol 18.
- Belfort, E. (2001) “Tabulae e Mangaba: Geometria Dinâmica”, In: VII ENEM- Encontro Nacional de Educação Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro.
- Duval, Raymond. (1993) “Registres de Répresentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée”. Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, vol. V, Irem de Strasbourg.
- Gravina, M. A. e Santarosa, L. M. C. (1998) “Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados”. Anais do IV Congresso Ibero-Americano de Informática Educativa, Brasília.
- Piaget, J. (1983) “Desenvolvimento da Inteligência”, Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- Piaget, J. (1990) “Epistemologia Genética”. São Paulo: Martins Fontes.
- Polettini, Altair F.F. (1996) “História de Vida Relacionada ao Ensino da Matemática no Estudo dos Processos de Mudança e Desenvolvimento de Professores”. Zitetiké, Campinas, v.4, n.5, p.29-48, CEMPEM-FE/UNICAMP.
- Ponte, João Pedro da. (1992) “Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação”, In: BROWN, Margaret et al. (Org.). Educação Matemática. Portugal: Instituto de Inovação Educacional .
- Projeto Fundação. (2000) “Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele”, IM/UFRJ.
- Van Hiele, P. (1986) “Structure and Insight” Orlando: Academic Press.