

## Informática e Educação Matemática: um estudo de caso com triângulos através da Geometria Dinâmica

George de Souza Alves<sup>1</sup>, Adriana Benevides Soares<sup>2</sup>, Cabral Lima<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática e Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro

<sup>2</sup>Instituto de Psicologia – Universidade Gama Filho / Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro

georgesa@posgrad.nce.ufrj.br, gildam@unisys.com.br, clima@nce.ufrj.br

**Abstract.** *The purpose of the present study was to analyze the contribution of a software of dynamic geometry for the understanding of related concepts the triangles, in contrast with the results presented for pupils who had the same studied content through the static representations of the chalk picture or didactic books. The field work carried through with ten voluntary pupils of the daylight period with ages between fifteen and seventeen years, being that five of them had participated of the experimental group and the other ones had participated of the control group. It was observed that the citizens of the experimental group had perfected the justifications of their reasoning and the forms to express some definitions. The lessons with the computer seem to have contributed for this change.*

**Resumo.** *A finalidade do presente estudo foi analisar a contribuição de um software de geometria dinâmica para a compreensão de conceitos relacionados a triângulos, em contraste com os resultados apresentados por alunos que estudaram o mesmo conteúdo através das representações estáticas do quadro de giz ou dos livros didáticos. O trabalho de campo se realizou com 10 alunos voluntários do período diurno na faixa etária de 15 a 17 anos, sendo que 5 deles participaram do grupo experimental e os outros 5 participaram do grupo de controle. Observou-se que os sujeitos do grupo experimental aperfeiçoaram as justificativas de seu raciocínio e as formas de expressar algumas definições e as aulas com o computador parecem ter contribuído para a mudança deste quadro.*

### 1. Introdução

Segundo PCN (1996), os alunos do ensino médio devem desenvolver conhecimentos práticos e contextualizados que correspondam às necessidades da vida contemporânea e conhecimentos mais amplos e abstratos que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo.

Um ponto de partida para este tipo de aprendizagem é sempre procurar elementos da vivência dos alunos, da escola e de sua comunidade mais próxima. Deste modo, o uso do computador tem adquirido importância cada vez maior no dia-a-dia das escolas e no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem.

A introdução do computador em sala de aula, entretanto, exige um redirecionamento para uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o aprendiz possa se reconhecer e se orientar no mundo do conhecimento (PCN, 1996).

No caso da educação matemática, é necessário empreender um trabalho mais lento e árduo que se inicia numa prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com a finalidade de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, generalizações de padrões e capacidade de argumentação, fundamentais para o processo de formação de conceitos e para a formalização do conhecimento matemático.

No processo de ensino-aprendizagem da geometria, a habilidade de visualização, o desenho, a argumentação lógica e a aplicação na busca de soluções para problemas são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da matemática e de outras áreas do conhecimento (PCN, 1996).

Alguns educadores matemáticos (Lorenzato, 1995; Laborde, 1998; Fainguelernt, 1999; entre outros) enfatizam a importância dos aspectos intuitivo e lógico no processo de ensino-aprendizagem da geometria. O primeiro destes aspectos se refere ao estudo do espaço e das relações espaciais e o segundo está relacionado ao raciocínio dedutivo e à compreensão e domínio de sistemas axiomáticos.

Laborde (1998) percebe que há um consenso entre educadores matemáticos de que o uso do computador no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir para a visualização geométrica (aspecto intuitivo).

A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, desde que esteja disponível para o aluno materiais de apoio didático baseados em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

O computador também pode ser visto como uma espécie de material concreto, já que seu uso apropriado pode proporcionar novas situações nas quais as formas virtuais adquirem aspectos de uma realidade quase material, abrindo novas perspectivas para o entendimento das formas que se apresentam na tela do computador.

Através dos recursos de animação de alguns *softwares* geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível de serem executados com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente executáveis com o uso do computador.

Com relação ao aspecto lógico, a demonstração de resultados geométricos pode ser tratada informalmente e de uma maneira menos rigorosa nos níveis de ensino fundamental e médio. O aluno deve ser encorajado a testar e refinar hipóteses para se convencer das proposições e dos resultados geométricos e o computador pode fazer a ligação entre os

experimentos e o raciocínio dedutivo, proporcionando ao aluno a oportunidade de compreender uma prova rigorosa num nível de ensino mais elevado.

O presente artigo relata uma experiência vivenciada em sala de aula e documentada para análise e discussão. A preocupação principal foi verificar até que ponto o uso da informática, através de um *software* de geometria dinâmica, pode de fato interferir no desenvolvimento da visualização ou da representação mental de objetos geométricos e, além disso, investigar se tais ferramentas também podem contribuir para a formalização de conceitos relacionados aos triângulos.

## 2. Metodologia

A finalidade do presente estudo foi analisar a contribuição de um *software* de geometria dinâmica para a compreensão de conceitos relacionados a triângulos, em contraste com os resultados apresentados por alunos que tomaram contato com o mesmo conteúdo através das representações estáticas do quadro de giz ou dos livros didáticos.

O estudo de campo teve como preocupação central compreender os seguintes problemas:

- ✓ Um *software* de geometria dinâmica contribui para uma melhor formação de conceitos sobre triângulos em estudantes ingressantes no ensino médio?
- ✓ A partir da utilização deste tipo *software*, há uma melhor compreensão dos tipos de triângulos e de suas cevianas?
- ✓ O material virtual permite que os sujeitos desenvolvam ou aperfeiçoam a habilidade de visualização destes polígonos?

A hipótese adotada foi a de que se um *software* de geometria dinâmica possui potencialidades como a precisão e variedade na construção de objetos geométricos, permite a exploração e descoberta e auxilia na visualização, conforme indicam Alves & Soares (2003), então a mudança dos sistemas de representação estática para a dinâmica pode melhorar o funcionamento de alguns processos cognitivos dos alunos, sobretudo em relação à percepção dos objetos geométricos e ao processamento da imagem, proporcionando uma compreensão mais eficaz dos conceitos.

### 2.1. Sujeitos

Dos dez alunos que assistiram a todas as aulas e fizeram todas as entrevistas e testes propostos, metade participou do grupo que trabalhou no laboratório de informática, com o uso do *software* de geometria dinâmica *Tabulae*, compondo o chamado grupo experimental e a outra metade teve aulas clássicas de geometria plana, compondo o grupo de controle.

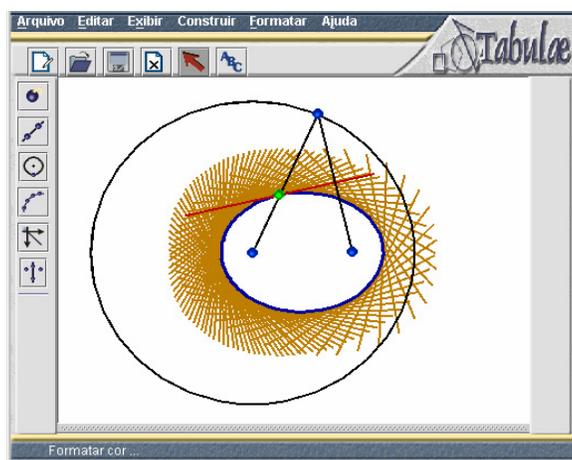
Para compor o grupo experimental foram utilizados os nomes fictícios de Gabriel, Miguel, Lucas, Paulo e João e o grupo de controle foi constituído por Daniel, Rafael, Pedro, Marcos e Mateus.

Todos eles estavam na faixa etária compreendida entre quinze e dezessete anos e eram alunos do período da manhã ou da tarde da escola e, durante o ensino fundamental, também estudaram em ensino regular no período diurno.

## 2.2. Instrumentos

Os instrumentos utilizados para a observação e análise foram um questionário para sondagem e caracterização dos sujeitos (entrevista I), um teste de conhecimento geométrico aplicado antes e após as aulas como pré e pós-teste (entrevista II), os testes de raciocínio verbal, raciocínio abstrato e raciocínio espacial da Bateria de Provas DAT, além do uso do *software Tabulae*, desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ.

A escolha deste programa se deveu ao fato do mesmo apresentar as mesmas características de outros existentes no mercado, mas representar uma opção de utilização mais barata, sobretudo, para o professor que trabalha em escola pública. Esta era uma oportunidade, também, avaliar os recursos, potencialidades e limitações deste *software*, já descritos em Alves & Soares (2003).



**Figura 1: Interface do *Tabulae***

A entrevista I era um questionário que tinha por objetivo traçar um perfil individualizado e, ao mesmo tempo, determinar parâmetros que pudessem caracterizar os grupos em estudo. As questões procuraram verificar a faixa etária dos alunos e alguns aspectos sobre a sua trajetória no ensino fundamental, tais como se este foi feito em escola pública ou particular, se o curso foi regular diurno, regular noturno ou supletivo, que disciplinas eles encontraram maior dificuldade, se possuíam computador em casa etc.

A entrevista II teve como principal finalidade avaliar os conhecimentos geométricos dos sujeitos, relativos a alguns aspectos sobre triângulos, tais como sua condição de existência, as relações entre os tipos de triângulo quanto aos seus ângulos internos e às medidas de seus lados e a compreensão das características de suas cevianas.

A primeira aplicação (pré-teste), realizada antes intervenção didática, objetivou verificar quais conhecimentos os sujeitos já traziam do ensino fundamental, enquanto a

segunda aplicação (pós-teste) procurou verificar a evolução daqueles conceitos após a intervenção realizada.

No momento das aplicações foi solicitado aos sujeitos que não fizessem qualquer tipo de desenho como auxílio ao seu raciocínio, tal solicitação teve a finalidade de verificar sua capacidade de representar e manipular imagens mentalmente (visualizar) e de que forma este fato se relacionava aos sujeitos de cada grupo estudado.

A finalidade da aplicação de testes de aptidões específicas da bateria DAT neste trabalho foi verificar algumas características dos sujeitos envolvidos que pudessem ser intervenientes nos resultados obtidos.

Foram aplicados os testes de raciocínio verbal (para verificar a habilidade de compreensão de conceitos expressos em palavras), de raciocínio abstrato (para verificar a capacidade de reflexão) e de relações espaciais (para verificar a capacidade de visualizar um objeto geométrico e de executar sua manipulação mental).

### **2.3. Procedimentos**

O trabalho de campo foi dividido em duas experiências distintas: aulas realizadas no laboratório de informática, com o uso da geometria dinâmica e aulas clássicas realizadas em sala de aula comum. Ao todo foram 11 encontros no laboratório e 12 na sala de aula, cada aula durava aproximadamente 1h30min.

Antes da atividade com o computador, houve uma introdução com nota histórica sobre a geometria euclidiana e sobre o *Tabulae* e a apresentação de um quadro explicativo com o menu do programa e suas respectivas funções básicas, assim como dos botões de atalho da interface do *software* e a função de cada um deles, com a finalidade de estarem sempre à disposição do aluno para consulta.

A princípio foi solicitado ao aluno que ele construísse livremente pontos, segmentos de reta, semi-retas, ângulos e circunferências, nomeando e medindo alguns destes objetos. Posteriormente, o estudante deveria realizar a construção de um quadrado com os recursos que já conhecia dos itens anteriores para depois explorar o recurso do “arrastar” sobre qualquer um dos vértices do quadrado construído. O objetivo era mostrar ao aluno mais uma característica da geometria dinâmica, ou seja, verificar a invariância de algumas propriedades da construção realizada, desde que ela tivesse sido feita obedecendo algumas propriedades geométricas em sua construção.

Neste primeiro momento, o aluno apenas verificava que sua construção não tinha levado em consideração tais propriedades e que o quadrado construído se desmontava com o “arrastar” de um de seus vértices. É importante ressaltar que os alunos tiveram bastante liberdade para explorar outros recursos do *software* durante esta aula.

A atividade seguinte foi inicialmente formulada com o objetivo de lembrar algumas propriedades do quadrado, mostrar a importância de se realizar uma construção no *software* utilizando as propriedades geométricas da figura em estudo e familiarizar o estudante com o passo a passo desta construção.

A seguir foi apresentada uma breve revisão sobre os significados de ângulo reto, agudo e obtuso e da classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos.

O objetivo da próxima atividade era que o aluno, através da exploração, observação e análise das medidas dos lados e dos ângulos internos de um triângulo escaleno, fosse estimulado a raciocinar a respeito das relações entre este tipo de triângulo e as classificações existentes quanto a seus ângulos. De modo análogo foi elaborada a atividade abordando triângulos isósceles e equiláteros.

A atividade posterior também tinha como objetivo que o aluno, através da exploração, observação e análise das medidas dos lados de um triângulo e de seu desenho, concluísse que não são quaisquer três segmentos de reta que formam este polígono e estivesse apto, então, a formular a condição necessária e suficiente para realizar tal construção.

No encontro seguinte os alunos realizaram uma tarefa sobre as relações entre os ângulos no triângulo, cujo objetivo era levá-los a conjecturar sobre algumas proposições geométricas.

A tarefa seguinte foi sobre a altura de um triângulo, cujo objetivo era explorar o recurso de “arrastar” da geometria dinâmica para analisar e avaliar as diferentes possibilidades de representação desta ceviana. O mesmo foi feito posteriormente com a mediana e a bissetriz.

As aulas clássicas foram exposições dialogadas sobre o conteúdo proposto.

### **3. Discussão dos Resultados**

Para comparar os resultados obtidos pelos sujeitos do grupo de controle e do grupo experimental foi levado em consideração o número total de respostas corretas dos sujeitos dos dois grupos sobre o número total de questões propostas na entrevista II, que corresponde ao teste de conhecimento geométrico, isto é, foi considerado o percentual de acertos de cada um dos sujeitos antes e depois do trabalho de campo realizado.

Deve-se ressaltar que durante a aplicação das entrevistas foi solicitado ao aluno que não utilizasse o recurso do desenho como auxílio a seu raciocínio. A finalidade foi verificar se houve algum dos alunos com relação à representação mental de conceitos relacionados a triângulos, ou seja, se houve algum desenvolvimento na habilidade de visualizar tais objetos, havendo exceção apenas em três questões que solicitavam o traçado da altura, da mediana e da bissetriz em três desenhos de triângulos sugeridos.

A última linha do quadro 1 e a ilustração apresentada pelo gráfico 1 mostram que o desempenho global dos sujeitos do grupo de controle no pré-teste foi ligeiramente superior, porém no pós-teste a situação se inverte e o desempenho global dos sujeitos do grupo experimental se torna superior, resultando num ganho maior entre estes sujeitos em relação aos resultados iniciais.

Quadro 1: Desempenho dos sujeitos dos dois grupos no teste de conhecimento geométrico

GRUPO EXPERIMENTAL				GRUPO DE CONTROLE			
Sujeitos	Pré-teste	Pós-teste	Ganho	Sujeitos	Pré-teste	Pós-teste	Ganho
	%	%	%		%	%	%
Gabriel	58,52	91,18	55,00	Daniel	47,06	67,65	43,75
Miguel	23,53	61,76	137,50	Rafael	32,35	44,12	36,36
Lucas	38,23	61,76	61,54	Pedro	11,76	55,88	375,00
Paulo	41,18	76,47	85,71	Marcos	47,06	50,00	6,25
João	17,65	61,76	250,00	Mateus	61,76	70,59	14,28
Global	35,88	67,65	88,52	Global	40,00	57,65	44,12

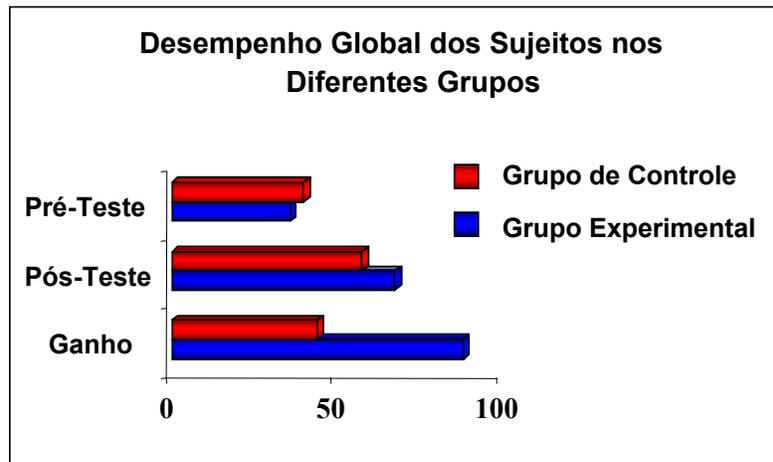


Gráfico 1: Desempenho dos sujeitos dos dois grupos no pré e pós-teste de conhecimento geométrico e o ganho no pós-teste em relação ao pré-teste

Os sujeitos do grupo de controle acertaram em conjunto 40% das questões no pré-teste e 57,65% no pós-teste, representando um crescimento de 44,12%. Apenas um deles ultrapassou a margem de 60% de aproveitamento após as aulas ministradas.

De um modo geral, eles continuaram com dificuldades para justificar seu raciocínio e definir alguns conceitos. Tal fato pode ser devido à dificuldade para compreender e expressar conceitos através de palavras, habilidade avaliada no teste de raciocínio verbal, cujo desempenho geral ficou abaixo da média neste grupo.

Um outro fator que também pode ter sido interveniente foi a dificuldade apresentada por eles para visualizar um objeto geométrico e executar sua manipulação mental, habilidade medida pelo teste de relações espaciais. As aulas clássicas com o uso de quadro de giz e texto impresso parecem ter pouco contribuído para a mudança deste quadro.

Os sujeitos do grupo experimental acertaram em conjunto 35,88% das questões no pré-teste e 67,65% no pós-teste, representando um crescimento global de 88,52%. Todos eles ultrapassaram a margem de 60% de aproveitamento após as aulas ministradas, sendo que um chegou a atingir uma marca superior a 90%. De um modo geral, eles aperfeiçoaram suas justificativas e as formas de expressar algumas definições.

Os estudantes que participaram deste grupo também apresentaram deficiência inicial com relação à visualização de um objeto geométrico e à execução de sua manipulação mental, habilidade medida pelo teste de relações espaciais, assim como os do grupo anterior, porém as aulas com o computador, através do uso da geometria dinâmica, parecem ter contribuído para a mudança deste quadro.

O maior crescimento verificado foi principalmente com relação à compreensão da condição de existência dos triângulos e às justificativas às perguntas sobre as relações entre os tipos de triângulo (“é possível que um triângulo retângulo seja também isósceles?”, por exemplo). Também houve um crescimento em relação às questões que solicitavam o traçado da altura, mediana e bissetriz dos triângulos indicados, mas não se observou melhora expressiva quando eram os alunos avaliados foram solicitados a definir as cevianas.

Num estudo que teve como base grupos de sujeitos tão pequenos não se deve ousar em fazer afirmações genéricas definitivas, porém ao se analisar os resultados encontrados com estes sujeitos é possível dizer que há evidências que o uso do *software* de geometria dinâmica e a seqüência didática escolhida para as aulas contribuíram para uma melhor aprendizagem entre os sujeitos do grupo experimental.

Verificou-se que estes mesmos sujeitos apresentaram respostas qualitativamente melhores que os do grupo de controle, mostrando que eles talvez tenham sedimentado e compreendido melhor os conceitos trabalhados durante as aulas.

Além de terem tido uma melhora maior no pós-teste, os alunos do grupo experimental mostraram maior desenvoltura para justificar suas respostas, ainda que tenham apresentado baixo desempenho prévio no teste de raciocínio verbal.

#### **4. Considerações Finais**

A educação de nível médio deve ser contextualizada e procurar a interdisciplinaridade sempre que possível. O trabalho aqui apresentado buscou compreender de que forma o uso do computador pode colaborar para esta contextualização e como um *software* de geometria dinâmica pode auxiliar na melhoria da habilidade de visualização.

De acordo com Fainguelernt (1999) o mundo concreto lida com operações que se realizam na prática, com verificação empírica, com evidência direta e com a credibilidade

intrínseca dos objetos reais. Para o aluno da educação básica, a geometria dinâmica contribui para esta concretização no mundo geométrico.

As figuras geométricas não são objetos geométricos, mas possuem um significado intuitivo para as pessoas, podendo ser manipuladas mentalmente (representações internas) à medida que os objetos sejam manipulados (representações externas).

Vergnaud (1985) considera que o conceito de representação é fundamental para analisar a formação de concepções e competências e os processos de transmissão do conhecimento. Para este autor, a relação do sujeito com o mundo real é de grande relevância para a aprendizagem, pois é partir daí que este põe à prova suas representações e concepções.

No trabalho realizado, os alunos que passaram pela experiência de lidar com as representações dinâmicas do *software* utilizado demonstraram uma evolução maior em relação à compreensão dos conceitos geométricos vistos, suas justificativas melhoraram, demonstrando uma melhor apreensão dos conceitos.

## 5. Referências Bibliográficas

Alves, G. S.; Soares, A.B. (2003). “Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *Software Tabulae*”. In: XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação – IX Workshop de Informática na Escola. Campinas: Unicamp. 2003, pp. 275-286.

Belfort, E. (2001). “Tabulae e Mangaba: Geometria Dinâmica”. In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro. 2001.

Fainguelernt, E. K. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999, 227p.

Guimarães, L.C. Ferramentas Computacionais para o Ensino de Matemática à Distância. In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro. 2001.

Laborde, C. “Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment”. In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI, V. (ed.). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century – An ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, 1998. pp. 113-121.

Lorenzato, S. “Por que não ensinar Geometria?”, In: Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo. n<sup>o</sup> 4, pp. 3-13, 1995.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Ministério da Educação. Brasília. 1996.

Vergnaud, G. (1985). “Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação”. Trad. Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. In: Psychologie Française, n<sup>o</sup> 30-3/4, pp.245-252.

Vigotsky, L.S. Pensamento e Linguagem. Tradução: Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 2003, 194p.