

## Trabalhando Fractais no Logo: uma experiência no ensino fundamental

Rony Cláudio de Oliveira Freitas<sup>1</sup>, Carmen Faria Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro de Ensino Superior Anísio Teixeira (CESAT)  
Av. Desembargador Mário da Silva Nunes, 1000 - Jardim Limoeiro - Serra – ES - CEP  
29164-240 – Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal do Espírito Santo  
Av. Fernando Ferrari, s/n, Vitória – ES – Brasil

rony@cesat.br; cfaria.vix@terra.com.br

**Abstract.** *This paper presents a experience developed with students of 7th grade in a work with mathematics using fractal geometry as a powerful tool to the learning of many mathematical concepts, for exemple the proportionality, the simmetry, the congruence, rotation, similarity and the genalisation. This project was accomplished using the computer specifically with the logo loughuage with the objective to motivate and to potentiate the larner in a significant way valuing the students creativity, allowing them to be owners of the building of the knowledge and mainly that used the computer to stimulate the cognitives activites.*

**Keywords:** Fractal geometry, mathematical education, Logo, Computer science in the Mathematical Education.

**Resumo.** Este artigo apresenta uma experiência realizada com alunos da 7ª série do ensino fundamental no trabalho com Matemática utilizando a geometria fractal como uma ferramenta enriquecedora e motivadora ao aprendizado de diversos conceitos matemáticos, como, por exemplo: a proporcionalidade, a simetria, a congruência, a rotação, a semelhança e a generalização. O trabalho foi realizado com a utilização do computador, especificamente utilizando a linguagem Logo, com a finalidade de motivar e potencializar a aprendizagem de forma significativa, valorizando a criatividade dos estudantes, permitindo que eles pudessem ser donos da construção do seu saber e, principalmente, que utilizassem o computador para estimular as atividades cognitivas.

**Palavras-chave:** Geometria fractal, educação matemática, logo, informática na Educação.

---

<sup>1</sup> Mestre em Informática. Professor de Matemática do CESAT e da Escola Monteiro Lobato CEMS.

<sup>2</sup> Mestranda em Informática. Coordenadora de Informática Educacional da Escola Monteiro Lobato CEMS.

## 1. Introdução

A idéia de utilizar a Geometria Fractal partiu da necessidade de se explorar uma geometria que se aproxima das formas expostas na natureza e a partir daí conseguir subsídios para motivar e embasar vários estudos importantes dentro da Matemática. Oferecer recursos para que os estudantes possam explorar e descobrir novas estratégias para o estudo faz parte das necessidades exigidas para o professor atual. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática, no Ensino Fundamental, que estão pautados por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, enfocam a abordagem de novas metodologias e práticas visando uma aprendizagem significativa buscando as competências mínimas necessárias para a formação básica. Entre eles destacam-se:

- a Matemática é componente importante na construção da cidadania;
- a Matemática precisa estar ao alcance de todos;
- a atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”;
- a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado;
- recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem.

A busca desta abordagem diferenciada a partir da percepção das formas irregulares da natureza e a possibilidade de utilizar um recurso informatizado para a melhoria da aprendizagem nos levaram a estudar as formas fractais fugindo um pouco do estudo tradicional de geometria encontrada nos livros didáticos e praticada nas escolas. Este desafio de fugir do tradicional foi o mesmo aceito pelos primeiros estudiosos deste tipo de geometria.

Foi aceitando este desafio que Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza e implementou o seu uso num diverso número de aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou fractais. Esta palavra (fractal) vem do latim ‘frangere’ que significa ‘quebrar’ e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares, complexos. [Barbariz, 1999].

O trabalho foi desenvolvido com turmas de 7ª série do ensino fundamental por ser nesta série que são abordados os conceitos de proporção, simetria, congruência, rotação, semelhança e generalização, e também por acreditarmos que este nível de escolaridade seja bastante propício à realização deste tipo de experimento. Podemos utilizar para esta afirmação a nossa experiência com aprendizes com faixa etária compatível e referências em pesquisas recentes.

Segundo Piaget, em sua classificação dos estágios de desenvolvimento da criança, no estágio de desenvolvimento Operatório Formal (de 12 anos em diante), a representação permite a abstração total, não se limitando ao imediato ou às relações pré-existentes. Neste período o indivíduo é capaz de pensar em todas as relações possíveis logicamente, buscando soluções a partir de hipóteses e não apenas pela observação da realidade. Aí, estruturas

cognitivas alcançam seu nível mais elevado e tornam-se capazes de aplicar o raciocínio lógico a todas as classes de problemas. [Barbariz, 1999].

Neste artigo apresentamos uma abordagem prática na qual pudemos experimentar uma forma de se trabalhar a matemática de maneira construtiva e significativa, por meio de simulações do mundo real e, principalmente, com a possibilidade de utilizarmos um experimento para projetar novas situações de aprendizagem, não nos comprometendo com o resultado e sim com o processo, o desenvolvimento e a possibilidade de novas descobertas a partir de um desafio que foi lançado e aceito pelos aprendizes.

Na seção 2 apresentamos um pouco do conceito da Geometria Fractal. Na seção 3, descrevemos a utilização de ambientes informatizados no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, enfatizando a linguagem Logo. Na seção 4 falamos da construção de fractais do computador e apresentamos algumas construções feitas por alunos e na seção 5 fazemos algumas considerações finais.

## 2. A Geometria Fractal

A ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita, ligadas às formas da Natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do Universo. São imagens de objectos abstractos que possuem o carácter de omnipresença por terem as características do todo infinitamente dentro de cada parte, escapando assim, da compreensão na sua totalidade pela mente humana. [www.insite.com.br/art/fractal<sup>3</sup>].

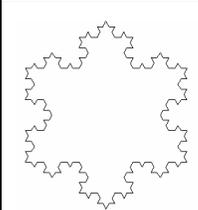
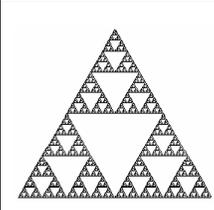
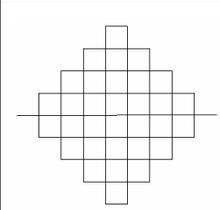
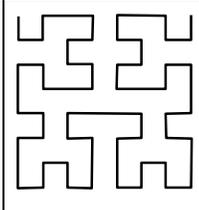
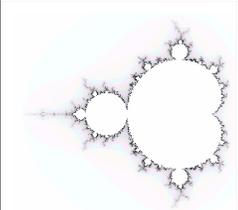
O termo "fractal" foi utilizado pela primeira vez pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, em 1967. Originário do adjetivo latino *fractus* e do verbo *frangere* (irregular, quebrar, fraturar), o vocábulo se popularizou depois que o polonês publicou, em 1982, o livro *The Fractals Geometry of Nature*. A palavra passou então a caracterizar as formas irregulares e as novas geometrias por ele descobertas, seja na geologia, na turbulência de fluídos ou no mercado financeiro.

Pode-se, simplificadaamente, definir fractais como formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot constatou ainda que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa, produz resultados fascinantes e impressionantes, tendo como características a auto-similaridade, a simplicidade em sua lei de formação e a construção por processos recorrentes. Na figura 1 são mostrados alguns exemplos de fractais famosos.

---

<sup>3</sup> Acessado em 17 de março de 2005.

Curva de Koch	Triângulo de Sierpinski	Curva de Peano	Curva de Hilbert	Conjunto de Mandelbrot
				

**Figura 1. Exemplos de Fractais**

O estudo dos fractais não se restringe apenas ao campo matemático, é também aplicado em meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia e Geografia e até em História, Economia e Lingüística. Os lingüistas começaram a aplicar a teoria dos fractais na evolução dos dialetos e, em Medicina, reconhecem-se características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Não é preciso ir tão longe para encontrar exemplos de fractais. Na natureza encontramos a couve-flor e os brócolos, as redes hidrográficas, as linhas de costas dos países, as nuvens e as rochas entre outros que são autênticos “fractais vivos”. Figuras que no século passado, eram vistas como anomalias matemáticas, hoje têm um papel notável na interpretação da realidade.

### **3. A informática como recurso à educação matemática**

A linguagem LOGO, resultado de um trabalho de equipe conduzido pelo matemático Seymour Papert no MIT (Massachusetts Institute of Technology), não se consiste apenas de um software, mas também de toda uma metodologia ou filosofia que lhe é subjacente. A filosofia surgiu dos contatos de Papert com a obra de Piaget e influências de outros diferentes pensadores contemporâneos como Dewey, Freire e Vygotsky.

Faz parte desta filosofia a visão que Papert tem do homem e do mundo, na qual ele o situa numa perspectiva interacionista, sendo o conhecimento o produto dessa interação, que é centrada nas formas com que o mundo cultural age e influencia o sujeito em interação com o objeto. Sobre esta importância, para o aprendizado, das interações no mundo, enfatiza Papert:

O Construcionismo, minha reconstrução pessoal do Construtivismo,... atribui especial importância ao papel das construções no mundo como apoio para o que ocorreu na cabeça, tornando-se, deste modo, menos uma doutrina puramente mentalista. [Papert, 1994]

Para Papert, o processo educacional deve ter como pressuposto o fato de que a criança não aprende apenas pelo ensino formal e deliberado, que ela é uma aprendiz inata, que mesmo antes de chegar à escola possui conhecimentos adquiridos por meio de uma aprendizagem natural, espontânea e intuitiva, que se dá via exploração, busca e investigação, que pode ser caracterizada como uma real auto-aprendizagem.

No LOGO, segundo Papert (1994), o aprendiz interage com um ambiente gráfico que implementa um estilo computacional de geometria (geometria da tartaruga). A interação acontece a partir da comunicação virtual com o cursor, que é representado na tela, por uma tartaruga. Ao deslocar a tartaruga na tela é necessário imaginar que seu próprio corpo está se movendo no espaço. Durante o deslocamento, a tartaruga deixa traços na tela do vídeo formando desenhos que podem ser observados pelo usuário, que verifica se os desenhos resultantes coincidem ou não com o planejado, dando a oportunidade de reformular sua hipótese e, novamente, testá-la, procedendo por experimentação e refinando a sua formulação inicial o quanto queira. A geometria da tartaruga é tão rigorosa e lógica como a geometria cartesiana, no entanto, muito mais fácil de compreender. Esta idéia de um sistema de regras e limitações como sua própria lógica interna, mas encorajando a exploração, a construção e a aprendizagem é a essência de um micromundo.

No momento em que o estudante deseja realizar um desenho que utilize figuras geométricas, ele terá que descobrir como fazer para "ensinar" a Tartaruga a desenhar essas figuras e, para ensinar, a criança tem que aprender. Nesse processo de ensino/aprendizagem, o aprendiz acabará descobrindo princípios importantes sobre distâncias, ângulos, retas, curvas, parábolas, simetria, paralelismo, proporção, perspectiva, etc. e acabará por dominar conceitos essenciais da geometria.

A utilização da linguagem LOGO para auxiliar na criação e desenvolvimento das atividades propostas foi importante para despertar a independência e a autonomia dos estudantes. Por ser um ambiente onde os aprendizes podem expressar seus entendimentos através da elaboração de procedimentos, o LOGO propiciou liberdade de ação e contato com recursos importantes na construção dos fractais, e no entendimento de conceitos importantes e de difícil entendimento para a faixa etária em questão, cita-se, por exemplo, a recursividade.

#### **4. Construindo fractais com o computador**

O trabalho foi realizado na Escola Monteiro Lobato CEMS, uma escola que há mais de 10 anos investe na informática educacional, promovendo o seu uso por meio de projetos educacionais interdisciplinares, sempre que possível. Os alunos que participaram utilizam a informática dentro deste princípio desde os 5 anos de idade quando são apresentados à linguagem Logo, com a utilização do software Micromundos.

Portanto, realizar este projeto com o apoio da informática tornou-se uma atividade bastante enriquecedora, tanto para o aprendizado da matemática, quanto para o amadurecimento na elaboração dos procedimentos, pois alguns novos conceitos precisaram ser introduzidos, por exemplo, a idéia de variável.

Inicialmente em sala de aula foi feita uma breve explanação sobre estes conceitos e também sobre a teoria sobre fractais. Os alunos puderam criar o triângulo de Sierpinski no papel e buscar algumas relações importantes, como a simetria, a proporcionalidade, a semelhança e a congruência.

As turmas (eram duas) foram divididas em duplas, e iniciaram realizando uma pesquisa na Internet sobre o que são fractais, buscando teorias e desenhos de algumas formas mais conhecidas.

Em seguida foi proposto que todos construíssem o fractal “Curva de Koch” com o objetivo de serem abordados os conceitos iniciais. A figura 2 ilustra algumas das “Curvas de Koch” construídas pelas duplas. É mostrada também uma das programações feitas para se chegar ao resultado das construções apresentadas. Alguns, apesar de construírem a mesma figura, particularizaram as suas criações mostrando criatividade e inovação.

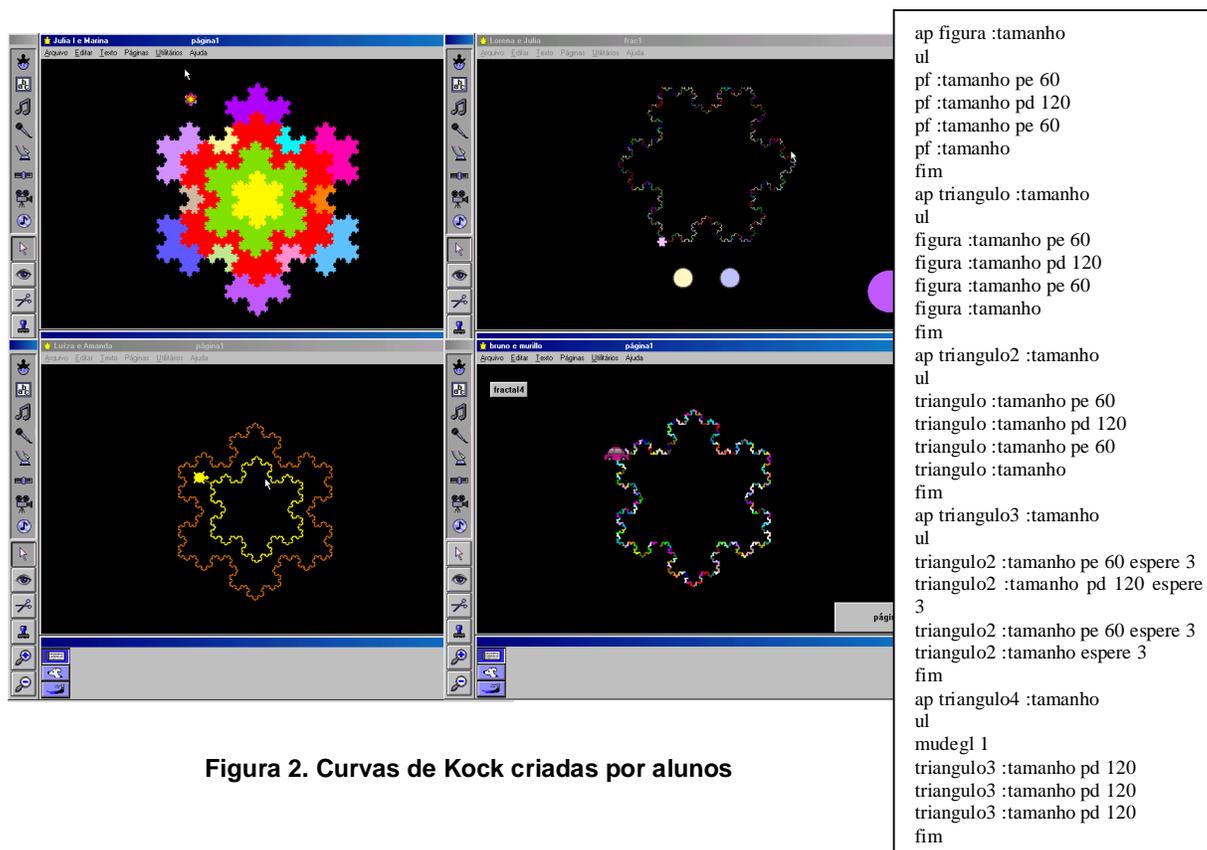
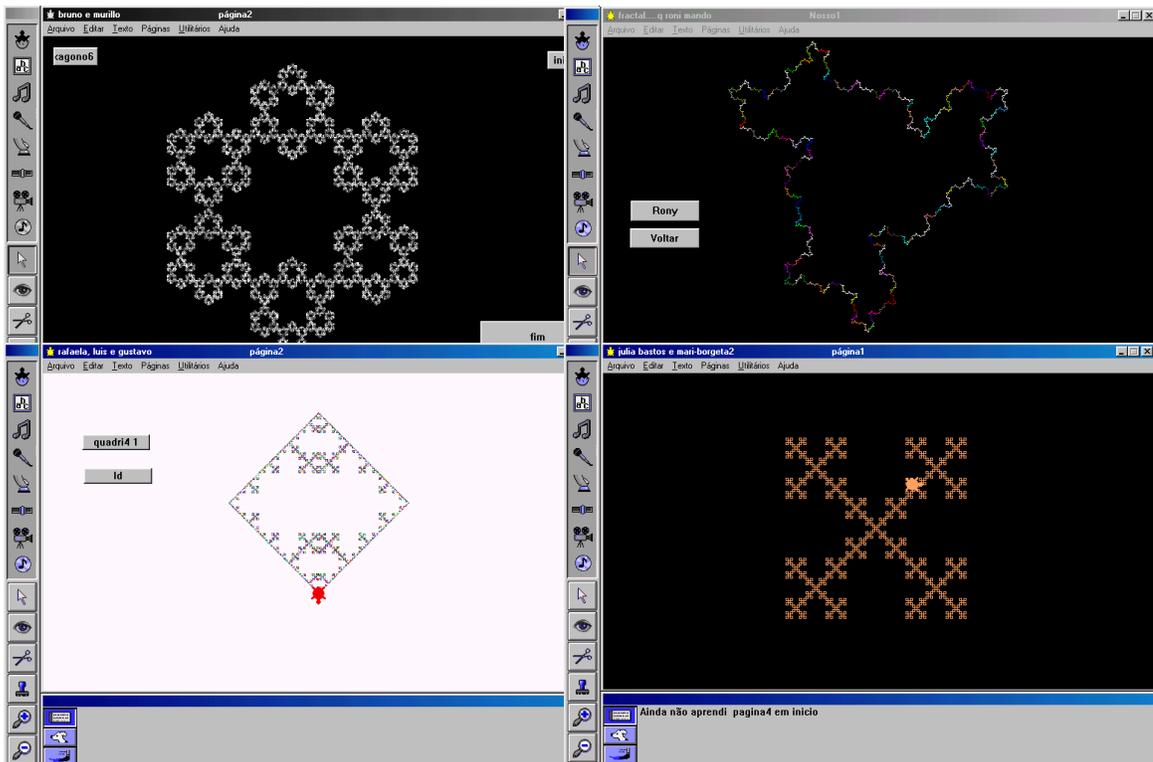


Figura 2. Curvas de Koch criadas por alunos

Depois de concluída esta primeira experiência com a “Curva de Koch”, cada dupla se empenhou em escolher um outro fractal para construir, e para isso utilizaram diversas fontes de pesquisa como livros, Internet, revistas, etc. Para nós, orientadores/observadores, mais importante do que o produto, era a criação, o processo da construção. Percebemos o envolvimento das duplas e o empenho dos estudantes na busca de novas formas e no estudo de alguns outros conceitos não previstos inicialmente na concepção do projeto. Obtivemos resultados surpreendentes, superando nossas expectativas.



**Figura 3. Fractais diversos criadas por alunos**

Todo o material produzido pelos alunos no computador foi utilizado para o entendimento de conceitos matemáticos. Puderam-se trabalhar a simetria, a semelhança, a proporcionalidade, entre outros, mas, destaca-se o estudo das generalizações, o que foi marcante no início do trabalho com a álgebra com boas referências ao estudo de seqüências e funções.

## 5. Considerações finais

Ao trabalhar fractais no computador não se pretendia criar algo novo, aliás, não se sabia nem ao certo se os alunos conseguiriam abstrair tal conceito. O processo exigiu muita cautela, pois o que não se queria era fazer algo inerte que não contribuísse no processo de ensino e muito menos que nada acrescentasse às aulas tradicionais. Era importante que a metodologia utilizada estivesse vinculada a três elementos importantes: “o ‘saber fazer’, o ‘como fazer’ e ‘para que fazer’ da atividade intelectual” [Mantoan et al, 1998].

A proposta foi embasada em conhecimentos anteriores, a partir de práticas de sala de aula e de leituras e discussões com profissionais das áreas de educação matemática e de informática educacional. A atividade pretendia que o estudante pudesse ser construtor de seu conhecimento, no qual houvesse autonomia para criação e proposições de conjecturas.

Os resultados conseguidos foram muito proveitosos, pudemos verificar não somente um aumento na motivação ao aprendizado, mas, sobretudo, a possibilidade de se trabalhar vários conceitos matemáticos de forma simultânea e muito mais leve e proveitosa. O computador foi uma ferramenta importantíssima, foi com ele que os

experimentos puderam ser feitos, testados e refeitos até se conseguir os resultados desejados e, com isto, atingir a aprendizagem desejada.

No decorrer deste trabalho os estudantes tiveram a oportunidade de entender a relação entre conceitos matemáticos e os fractais. Descreveu-se no decorrer do trabalho as hipóteses e os encaminhamentos de raciocínio que, uma vez submetidos a verificações no computador, levou a reformular o processo de busca. Nesse quadro, o sistema de idéias vinculado ao LOGO levou a depurar o procedimento e o próprio raciocínio.

É importante ressaltar que a avaliação final da experiência a coloca em sintonia com as teorias de Vygostsky (1988), que diz que o desenvolvimento de crianças e adolescentes deve ser olhado de maneira prospectiva, isto é, com referência ao que está para acontecer na trajetória de cada um. De acordo com este autor devem-se procurar os "brotos", "as flores" ou "ramos" do desenvolvimento e seus rumos em vez de somente seus frutos.

“A melhor aprendizagem ocorre quando o aprendiz assume o comando de seu próprio desenvolvimento em atividades que sejam significativas e lhe despertem o prazer” [Papert, 1994], o que torna o ato de aprender um ato de “alegria e contentamento, no qual o cognitivo e o afetivo estão unidos dialeticamente” [Freire, 1995].

## 6. Referências

- BANNON, Thomas J.: Fractals and Transformations: The Mathematics Teacher, March 1991.
- BARBARIZ, Taís Alves Moreira. Fractais na Sala de Aula. UERJ. 1999.
- BARTON, Ray: Chaos and Fractals: The Mathematics Teacher, October 1990.
- CAMP, Dane R.: A Fractal Excursion: The Mathematics Teacher, April 1991.
- COES, Loring: Building Fractal Models with Manipulatives: The Mathematics Teacher, Vol 86, N° 8, November 1993.
- D'AMBROSIO, Ubiratan: Educação Matemática da Teoria à Prática : São Paulo. Papyrus Editora, 1997.
- FREIRE, P. “A Educação na Cidade”. São Paulo: Cortez, 1995.
- GRAVINA, M. A. e SANTAROSA, L. M. (1998) “A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados”. IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação. Brasília-DF.
- KERN, Jane F. and MAUK, Cherry C.: Exploring Fractals - a Problem-solving Adventure Using Mathematics and Logo: The Mathematics Teacher, March 1990.
- LORNELL, Randi e WESTERBERG, Judy: Fractals in High School: Exploring a New Geometry: The Mathematics Teacher, Vol 92, N° 3, March 1999
- MANDELBROT, Benoit: Fractals: Form, Chance and Dimension W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA , 1977.
- MANDELBROT, Benoit: The Fractal Geometry of Nature: W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 1982.
- MANTOAN, M. T. E., Martins, M. C. e MISKULIN, R. G. S. (1998) “Análise Microgenética de Processos Cognitivos em Contextos Múltiplos de Resolução de

Problemas”; In.: Revista Brasileira de Informática na Educação; No. 3; ISSN: 1414-5685; págs. 27-44; setembro.

MOYSÉS, L. “Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática”. 2ª Edição. Campinas-SP: Papyrus Editora, 2000.

Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 1ª à 4ª séries. Brasília-DF, 1998.

PIAGET, J. “A Práxis na Criança”. In.: Piaget. Rio de Janeiro: Forense, 1972.