Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador

George Alves [1]

[1] Departamento de Ciência da Computação e Iniciação ao Trabalho do Colégio Pedro II

george@cp2.g12.br

Abstract. *The main objective of the present work was to investigate if the combination of a didactic sequence using the Principle of Cavalieri and the use of a software of dynamic geometry can contribute for the development of the space reasoning in secondary school. The citizens of the research were 70 pupils of the nocturnal period, being that 39 of them had had lessons in a computer science laboratory and 31 had had classic lessons of space geometry. For analysis of the results, tests of reasoning of the BPR-5 battery had been used, besides a test of geometric knowledge on the chosen subject and the notes of the tests with the considered content. The results had shown one better performance between the pupils who had used the computational tool.*

Resumo. *O objetivo central do presente trabalho foi investigar se a combinação de uma seqüência didática utilizando o Princípio de Cavalieri e a utilização de um software de geometria dinâmica pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial no ensino médio. Os sujeitos da pesquisa eram 70 alunos do período noturno de uma escola técnica, sendo que 39 deles tiveram aulas num laboratório de informática e 31 tiveram aulas clássicas de geometria espacial. Para análise dos resultados foram utilizados testes de raciocínio da bateria BPR-5, um teste de conhecimento geométrico sobre o tema escolhido e as notas das provas com o conteúdo proposto. Os resultados mostraram um melhor desempenho entre os alunos que utilizaram a ferramenta computacional.*

1. Introdução

A aprendizagem da geometria euclidiana continua relegada a segundo plano, sobretudo na escola pública. Os principais componentes do processo educativo – alunos, professores, autores de livros didáticos e pesquisadores – têm oscilado ao longo dos anos entre diversos modismos: desde o formalismo e suas demonstrações apoiadas pelo raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização, até chegar ao empirismo que conseguiu poucos resultados.

Daí a necessidade de se enfatizar a aprendizagem da geometria euclidiana na educação básica, pois é nesse nível de ensino que o estudante começa a compreender os aspectos espaciais do mundo físico, desenvolvendo uma intuição espacial e, mais tarde, seu pensamento lógico, base para prosseguir em estudos mais avançados na universidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1996) sugerem que o ensino de geometria enfatize a exploração do espaço e de suas representações e faça uma articulação entre a geometria plana e a espacial; destacando, também, a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e de se trabalhar explicações, argumentações e demonstrações. Além disso, o documento ressalta a importância de se incorporar ao ensino os recursos das tecnologias da comunicação.

O uso de *softwares* educativos nas aulas de geometria, especialmente os de geometria dinâmica, vem ao encontro dessas propostas, pois de acordo com este documento a utilização do computador ainda possibilita criar ambientes que fazem surgir novas formas de pensar e agir.

Alguns trabalhos enfatizam o desenvolvimento da capacidade da criança para representar objetos geométricos e perceber, criar e visualizar imagens. Nesse trabalho procurou-se verificar se ainda existe alguma forma de alcançar o desenvolvimento da visualização geométrica na adolescência ou na fase adulta, quando os alunos muitas vezes apresentam resistências para a utilização de material concreto, o que facilitaria bastante tal tarefa.

Diante das resistências para o uso de material concreto nessa fase da vida estudantil, o computador pode ser um importante substituto e constituir-se numa ferramenta que pode prestar uma boa contribuição.

Passa a ser um problema interessante investigar se os estudantes conseguem resolver problemas geométricos nos ambientes virtuais e dinâmicos e como a geometria dinâmica pode auxiliar nesse processo. Em outras palavras, é de grande relevância investigação sobre se a integração de métodos visuais com métodos geométricos, comuns nos programas de geometria dinâmica, contribui para a aquisição do conhecimento geométrico.

O estudo procurou prestar uma contribuição para a pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem da geometria, relatando uma experiência documentada em sala de aula, mostrando que houve ganhos no raciocínio espacial dos alunos que utilizaram a ferramenta computacional dinâmica.

2. A Visualização Geométrica e a Geometria Dinâmica

A geometria é o tópico que tem experimentado as maiores e mais profundas transformações, em relação à utilização do computador no dia-a-dia das aulas de matemática; principalmente devido ao desenvolvimento de *softwares* específicos voltados para o seu processo de ensino-aprendizagem.

O aspecto intuitivo da aprendizagem da geometria, preocupado com o estudo do espaço e das relações espaciais, favorece fortemente o emprego da tecnologia nesse caso. Segundo Laborde (1998) há um consenso entre educadores matemáticos que o uso do computador no ensino de geometria pode contribuir para a visualização geométrica.

Esse mesmo autor observou adultos com conhecimento de geometria que tentavam resolver problemas geométricos incomuns num ambiente computacional e constatou que a evidência visual exercia um importante papel no processo de solução: (a) a evidência visual, neste caso, foi interpretada em termos geométricos e gerou questionamentos que foram resolvidos pelo significado geométrico; (b) a análise geométrica provocou novas questões que, num primeiro momento, foram exploradas empiricamente através dos *softwares*.

O conceito de **visualização** é de grande importância para a aprendizagem geométrica e, nesse artigo, o significado adotado é o de formar ou conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante aos olhos no momento.

Na teoria de Van Hiele (1986), o reconhecimento visual é o primeiro nível do pensamento geométrico, pois o aluno visualiza o objeto geométrico e o identifica. Segundo esse autor, a visualização ou representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal ou síntese das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito.

Contudo ainda há controvérsias sobre como a visualização se forma em nossa mente, porém não há razão para que estudos sobre seu desenvolvimento não ocupem um lugar de destaque. Segundo Kaleff (1998), essa é uma habilidade que pode ser desenvolvida, desde que estejam disponíveis para o aluno materiais de apoio didático baseados em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

Em alguns casos o computador também pode ser visto como uma espécie de material concreto. O seu uso apropriado pode tornar o ensino da matemática muito mais eficiente, integrado e significativo, além de elucidar a relação que essa ciência tem com outras disciplinas.

Através dos recursos de animação de alguns *softwares* geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exeqüíveis com o uso do computador.

Com relação ao aspecto lógico da aprendizagem da geometria, alguns estudiosos acreditam que o computador acaba criando obstáculos no caminho da visualização para a prova formal em geometria. Para eles, a evidência visual e os outros instrumentos de validação disponíveis podem tornar este procedimento desnecessário para o convencimento e até mesmo para o entendimento do aluno.

Por outro lado, outros defendem que a visualização pode ajudar nas demonstrações desde que o professor seja hábil para propor problemas e estratégias. Durante a educação básica, o aluno deve ser encorajado a testar e refinar hipóteses para se convencer das proposições e dos resultados geométricos. Assim, o computador pode fazer a ligação entre os experimentos e o raciocino dedutivo, proporcionando ao aluno a oportunidade de compreender uma prova rigorosa num nível de ensino mais elevado.

Para atingir os principais objetivos do ensino da geometria, é necessário que o aluno seja capaz de relacionar os fenômenos visuais aos fatos geométricos, reconhecer visualmente as propriedades geométricas, interpretar os desenhos em termos geométricos e saber realizar construções de configurações geométricas (Laborde, 1998).

Uma aprendizagem alcança tais metas quando capacita o estudante a utilizar o desenho como um auxílio ao seu raciocínio num nível abstrato, selecionando as informações relevantes extraídas de representações visuais e distinguindo as verdadeiras propriedades dos objetos geométricos daquelas encontradas em representações prototípicas ou contingentes. Para Laborde (1998) esta é a base para a elaboração das provas de proposições geométricas em ambientes de geometria dinâmica.

Com relação aos *softwares* de geometria dinâmica, Alves & Soares (2003) apontam como principais potencialidades ou características: a precisão e variedade na construção de objetos geométricos, a exploração e descoberta, a visualização ou representação mental de objetos geométricos e a prova ou demonstração.

O desenvolvimento desses *softwares* foi proporcionado pelos avanços nos recursos disponíveis no *hardware* dos computadores pessoais. Eles apareceram a partir do crescimento na capacidade de memória e na velocidade de processamento das informações dos microcomputadores, além do surgimento do *mouse* como meio de comunicação do usuário com a interface gráfica.

No mercado há vários exemplos de *softwares* de geometria dinâmica, entre os quais podem ser citados: *Cabri-géomètre*, *The Geometers Sketchpad* (*Key Curriculum Press*), *Geometric Supposer* (*Apple II*, Israel), o pioneiro, Dr. Geo (H. Fernandes, Grenoble, França), *Cinderella* (Alemanha), *Euklid* (Alemanha), Régua e Compasso (França) e finalmente o *Tabulæ* (geometria plana) e o Mangaba (geometria espacial), desenvolvidos no Departamento de Ciências da Computação do Instituto de Matemática da UFRJ.

O *software* utilizado durante o estudo de campo aqui relatado foi o *Calques 3D*, que é gratuito e está destinado à aprendizagem da geometria espacial. Ele foi desenvolvido por Nicolas Van Labeke como parte de sua tese de doutorado na Universidade Henri Poincaré, Nantes I em 1999 e está disponível para *download* através da página http://www.psyc.nott.ac.uk/staff/nvl/Calques3D/download.html.

O *Calques* 3D foi desenvolvido na linguagem C++ 4.5 e está disponível para PC 486 ou superior e *Windows* 3.1 ou *Windows* 95/NT ou superior. Ele é um micro-mundo planejado para a construção, observação e exploração de figuras geométricas espaciais (Van Labeke, 1998).

O usuário tem a possibilidade de ver, observar e compreender o espaço tridimensional, modificando o sistema de referência espacial, escolhendo a perspectiva e modificando o ponto de vista do observador. Ele também pode realizar uma construção dinâmica de figuras geométricas e explorar e descobrir as propriedades geométricas destas figuras, deformando-as através do “arrastar” de alguns pontos.

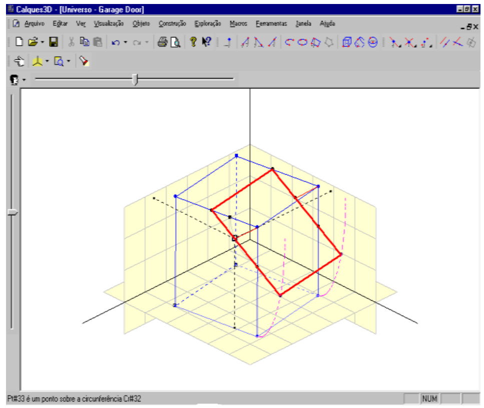

Figura 1: Interface do Calques 3D

A interface desse programa (fig.1) permite um acesso bastante intuitivo e adaptável, pois o aluno não necessita ter uma preparação especial para utilizá-lo e o professor pode decidir, de acordo com a seqüência didática preparada por ele, quais funcionalidades devem estar disponíveis ao estudante.

3. Metodologia

O problema do estudo realizado foi investigar se a combinação da seqüência didática escolhida e a utilização de um *software* de geometria dinâmica realmente contribuem para uma melhor representação mental de conceitos e objetos geométricos pelos alunos.

A hipótese de trabalho adotada foi a de que se a geometria dinâmica possibilita que o aluno veja as construções geométricas de diferentes pontos de vista e se o Princípio de Cavalieri permite uma abordagem mais intuitiva para justificar as fórmulas de volume, então os estudantes têm uma melhor compreensão das mesmas e desenvolvem seu raciocínio espacial.

3.1. Sujeitos

Os alunos foram classificados em grupo de controle, constituído por 31 sujeitos que presenciaram aulas clássicas de geometria espacial, e em grupo experimental, constituído por 39 sujeitos que utilizaram a ferramenta computacional dinâmica. Os grupos não foram formados aleatoriamente, pois as turmas tinham a formação definida pela própria escola.

Inicialmente tanto o grupo de controle quanto o grupo experimental tinham 49 sujeitos cada. Para análise deste estudo, porém, foram considerados apenas os alunos que freqüentaram todas as aulas e responderam a todas as entrevistas e testes, reduzindo o grupo de controle para 31 e o experimental para 39 sujeitos.

3.2. Instrumentos

Os instrumentos utilizados para a observação e análise foram um questionário para sondagem e caracterização dos grupos, um teste de conhecimento geométrico, as notas de provas realizadas com o conteúdo proposto durante o terceiro e quarto bimestres letivos de 2004 e os testes de raciocínio verbal, raciocínio abstrato, raciocino numérico e raciocínio espacial da Bateria de Provas de Raciocínio (BPR-5), cujas instruções se encontram em

Almeida & Pimi (2000).

O último deles foi aplicado antes e após o trabalho da sala de aula, a fim de verificar se o desempenho dos alunos havia se modificado com o uso ou não do *software* de geometria dinâmica.

3.3. Procedimentos

O assunto abordado durante as aulas foi o cálculo de volumes dos sólidos mais vistos no currículo do ensino médio.

De acordo com Lima (1991), há três maneiras para a abordagem desse assunto: utilizar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, usar o cálculo infinitesimal ou utilizar o Princípio de Cavalieri.

Dentre as alternativas citadas, o Princípio de Cavalieri "permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume" (Lima, 1991, p.89) e esta foi, então, a opção adotada durante as aulas.

As seqüências didáticas utilizadas foram baseadas nas propostas de Dante (1999) e Trotta, Imenes & Jakubovic (1980): inicialmente comprova-se a fórmula para o cálculo do volume do paralelepípedo retângulo, em seguida parte-se para a fórmula de um prisma qualquer, para a do cilindro, a de uma pirâmide qualquer, a do cone e, finalmente a da esfera.

As aulas clássicas também não foram completamente tradicionais, pois elas não eram apenas expositivas e, assim como as do laboratório, também foram baseadas em atividades de ensino em que a movimentação das figuras era substituída por desenhos estáticos nas folhas impressas.

4. Resultados

A principal finalidade do estudo foi verificar a influência do uso de um *software* de geometria dinâmica sobre o desenvolvimento da visualização geométrica e se esse desenvolvimento pode interferir em sua aprendizagem da geometria.

Para a análise dos resultados foram consideradas três variáveis: as médias das provas aplicadas durante os bimestres em que as aulas foram realizadas, o desempenho dos alunos no teste de conhecimento geométrico e no teste de raciocínio espacial. Este último teste é que possibilitou verificar a capacidade de visualização dos alunos ou a capacidade de formar representações mentais visuais e manipulá-las.

Um pressuposto básico e importante em qualquer tipo de planejamento é o de que as médias dos grupos não sejam significativamente diferentes no início de um experimento (Macguigan, 1976).

Deste modo, como não se trata de grupos escolhidos ao acaso, o pré-teste de conhecimento geométrico e os testes de raciocínio BPR-5 servem para uma caracterização e comparação dos grupos antes da realização do experimento.

4.1. Média das provas aplicadas

A média obtida pelos sujeitos do grupo de controle foi de 5,86 e a obtida pelos sujeitos do grupo experimental foi de 7,36, aproximadamente 26% superior.

Houve a necessidade de aplicação do teste t para decidir se a diferença entre as médias dos dois grupos era apenas resultado de flutuações casuais ou se foi significativa. No quadro 1, GE indica a média dos sujeitos do grupo experimental e GC a média dos sujeitos do grupo de controle, N indica o número de sujeitos usados na comparação, df = N – 1 é o grau de liberdade, t indica a medida de comparação e p é a probabilidade ou nível de significância, cujo valor utilizado pela psicologia experimental é $p < 0,05$.

Quadro 1: Resultados do teste t para as médias das provas aplicadas

GE	GC	N	df	t	p
7,36	**5,86**	**31**	**30**	**3,322**	**0,002**

A hipótese nula garante que só há diferença significativa entre os grupos se t não for suficientemente grande, ou seja, se a diferença entre os grupos não for grande demais para ser explicada unicamente a flutuações casuais ou por um erro experimental.

Neste caso, não é razoável considerar que a diferença real entre as médias dos dois grupos seja zero, supondo-se que foram utilizadas todas as garantias experimentais adequadas na obtenção destes resultados. Conseqüentemente os grupos diferem somente pelo fato de terem sofrido um tratamento experimental diferente, tendo recebido valores diferentes para a variável independente. Logo esta foi capaz de influir nas medidas da variável dependente, que foi justamente o objeto do experimento (MacGuigan, 1976).

Conforme os resultados apresentados no quadro 1, pode-se rejeitar a hipótese nula no caso das médias apresentadas, já que $t = 3,322$ e $p = 0,002 < 0,05$, mostrando que a diferença obtida pode ser atribuída ao fato dos grupos terem sofrido tratamento experimental diferenciado.

4.2. Teste de conhecimento geométrico

O teste de conhecimento geométrico foi aplicado antes (pré-teste) e depois das aulas (pós-teste) realizadas.

Numa análise inicial percebe-se uma superioridade no desempenho do grupo experimental sobre o grupo de controle. Quando são analisadas as médias de acertos no pré-teste, o grupo de controle apresenta desempenho de 42,80% passando para 53,54% no pós-teste. O crescimento foi de 25,09%.

No grupo experimental houve uma média inicial de 43,59% de acertos no pré-teste e de aproximadamente 62,90% no pós-teste, demonstrando um ganho de 44,30%. Portanto superior ao do grupo de controle.

Quando o teste t é aplicado para comparar a variação do desempenho dos grupos no pré e pós-teste, os resultados apontam para diferenças de desempenho significativas nos dois casos, pois $t = 9,909$ e $p = 0,000 < 0,05$ para o grupo experimental e $t = 7,835$ e $p =$

0,000 < 0,05 para o grupo de controle (quadro 2). Observa-se que os resultados fornecidos pelo *software* SPSS são aproximados até a casa de milésimos.

Quadro 2: Resultados do teste t comparando o pré e pós-teste de conhecimento geométrico para o grupo experimental (GE) e grupo de controle (GC)

	Pré-teste	Pós-teste	N	df	t	p
GE	**43,59%**	**62,90%**	**39**	**38**	**9,909**	**0,000**
GC	**42,81%**	**53,55%**	**31**	**30**	**7,835**	**0,000**

Os resultados do quadro 3 indicam que antes do início da experiência em sala de aula não havia diferença significativa entre os grupos, já que t = 0,141 e p = 0,89 > 0,05. Entretanto, quando foram comparadas as médias das provas aplicadas ao final de cada etapa do estudo, pode-se considerar que houve significância na diferença entre os grupos, já que t = 3,063 e p = 0,05. Ainda que valor não seja inferior a 0,05 (e sim igual), parece razoável rejeitar a hipótese nula neste caso.

Observa-se que as médias obtidas pelos dois grupos são apenas razoáveis, pois não ultrapassaram 65% de acertos no pós-teste. Os resultados dos testes de raciocínio da bateria BPR-5 indicaram que a maioria dos sujeitos dos dois grupos possui uma capacidade abaixo do que seria o esperado para esse nível de escolaridade para resolver problemas que exigem a análise de informações de uma determinada situação, o cruzamento dessas informações, a criação de concepções abstratas e a dedução de respostas para o problema a partir destas concepções.

Quadro 3: Resultados do teste t comparando os grupo experimental e grupo de controle a partir das médias de acertos no teste de conhecimento geométrico no pré e pós-teste

	GE	GC	N	df	t	p
Pré-teste	**43,22%**	**42,80%**	**31**	**30**	**0,141**	**0,89**
Pós-teste	**63,64%**	**53,54%**	**31**	**30**	**3,063**	**0,05**

Os resultados apresentados no quadro 2 podem indicar que a simples adoção da seqüência didática utilizando o Princípio de Cavalieri, com ou sem o uso do *software* de geometria dinâmica, já trouxe melhora significativa para o desempenho dos alunos. Porém, é possível observar no quadro 3 que quando os dois grupos foram comparados no pós-teste, o desempenho do grupo experimental foi significativamente melhor que o do grupo de controle.

4.3. Teste de raciocínio espacial

O teste de raciocínio espacial foi de grande importância para a verificação da hipótese geral estabelecida no estudo realizado: a de que a geometria dinâmica contribui para a representação mental de objetos e conceitos geométricos e para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos.

A primeira comparação realizada foi aquela que confronta o desempenho dos dois grupos no teste de raciocínio espacial, antes e após a realização das aulas. Através do quadro 4 é possível verificar que antes da realização do presente trabalho de campo a hipótese nula não poderia ser descartada, ou seja, não havia diferença significativa entre os grupos, pois t = 0,948 e p = 0,351 > 0,05.

Após as aulas, segundo a aplicação do teste t, a diferença entre os grupos permaneceu não sendo significativa, pois t = 1,734 e p = 0,093 > 0,05. Ainda assim é possível perceber que o valor do parâmetro p apresentou uma grande melhora aproximando-se bastante do valor de corte adotado pela psicologia experimental.

Quadro 4: Resultados do teste comparando o grupo experimental (GE) com o grupo de controle (GC) no teste de raciocínio espacial

	GC	GE	N	df	t	p
Pré-teste	**38,99**	**45,25**	**31**	**30**	**0,948**	**0,351**
Pós-teste	**42,19**	**53,93**	**31**	**30**	**1,734**	**0,093**

Quando o teste t é aplicado aos resultados obtidos pelos sujeitos dos dois grupos, antes e após as aulas ministradas, observa-se que no grupo experimental houve ganho significativo, já que t = 3,846 e p = 0,000 < 0,05. A hipótese nula pode, portanto, ser descartada neste caso. No entanto, no grupo de controle não é possível considerar que tenha havido um ganho significativo, pois t = 1,696 e p = 0,100 > 0,05 e deste modo, a hipótese nula não deve ser descartada. Ver quadro 5.

Quadro 5: Resultados do teste t comparando o pré e pós-teste de raciocínio espacial no grupo de controle (GC) e no grupo experimental (GE)

	Pré-teste	Pós-teste	N	df	t	p
GC	**38,39**	**42,19**	**31**	**30**	**1,696**	**0,100**
GE	**42,92**	**51,84**	**39**	**38**	**3,846**	**0,000**

5. Considerações Finais

O estudo aqui apresentado procurou compreender de que forma o uso do computador, em conjunto com uma seqüência didática adequada, poderia auxiliar na melhoria do raciocínio espacial de alunos do ensino médio de uma escola pública.

Os resultados mostraram que os sujeitos que pertenciam ao grupo experimental obtiveram um desempenho significativamente superior em relação aqueles do grupo de controle no pós-teste de conhecimento geométrico e na média das provas aplicadas. No pós-teste de raciocínio espacial esta diferença não chegou a ser significativa, mas houve uma grande aproximação do valor do grau de significância dos resultados em relação ao valor de corte adotado pela psicologia experimental (0,05), quando o valor obtido no pré-teste é comparado com o obtido no pós-teste (inicialmente este valor foi de 0,351 passando a 0,093).

Um fator que pode ter sido interveniente nos resultados e ter contribuído para que a diferença não chegasse a ser tão significativa foi a utilização da seqüência didática com o Principio de Cavalieri tanto com o grupo de controle quanto com o grupo experimental e o freqüente incentivo para a participação dos alunos através de interações entre eles e deles com o professor nas duas situações de sala de aula.

Deve ser ressaltado, entretanto, que além de possibilitar a melhoria do desempenho dos alunos e de seu interesse pelas aulas de geometria, o uso da geometria dinâmica pode trazer uma importante contribuição para o próprio currículo de Matemática nos níveis de ensino fundamental e médio. As aulas com o uso destes *softwares* certamente exigirão mais tempo para formalização dos conceitos e muito planejamento das atividades por parte do professor.

6. Referências Bibliográficas

Almeida, L.S.; Primi, R. (2000). Manual Técnico – Bateria de Provas de Raciocínio. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Alves, G.S.; Soares, A.B. (2003). "Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *Software Tabulae"*. In: XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação – IX Workshop de Informática na Escola. Campinas: Unicamp. 2003, pp. 275-286.

Dante, L.R. (1999). Matemática – Contexto e Aplicações, vol. 2, Ática, São Paulo.

Kaleff, A.M.M.R. , Vendo e Entendendo Poliedros. Niterói: EdUFF, 209p, 1998.

Laborde, C. (1998) "Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment". In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI,V.(ed.). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21^{st} Century – An ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, pp. 113-121.

Lima, E.L. (1991). Medida e forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança, Grafitex – Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro.

MCguigan, F.J.(1976). Psicologia Experimental – Uma Abordagem Metodológica. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária (EPU), 436p.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Ministério da Educação, Brasília, 1996.

SPSS. Disponível em http://www.spss.com/downloads/ . Acesso em 05/08/2004.

Trotta, F., Imenes , L.M.P.& Jakubovic, J. (1980). Matemática Aplicada, vol.3, Moderna, São Paulo.

Van Hiele, P. Structure and Insight. Orlando: Academic Press, 1986.

Van Labeke, N. (1998). "Calques 3D: a microworl for spatial geometry learning". In: ITS'98 - System Demonstrations, San Antonio (Texas), August 16-19. Disponível em http://www.psyc.nott.ac.uk/staff/nvl/docs/its_sd1998.pdf . Acesso em 08/02/2005.

Vergnaud, G. (1985). "Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação". Trad. Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. In: Psychologie Française, nº 30-3/4, pp.245-252.