Avaliando o Conhecimento Algébrico dos Estudantes através de Redes Bayesianas Dinâmicas

Henrique M. Seffrin[1], **Patricia Jaques**[1]

[1]Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPCA)
Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS)

hseffrin@outlook.com, pjaques@unisinos.br

Abstract. *Knowledge Inference is a very important component in Intelligent Tutoring Systems development. It provides information about the student knowledge, which allow the tutor to adapt the instruction to the student needs. In the literature, it is common the use of Bayesian Networks to perform this kind of inference, because they are able to deal with uncertainties and allow to represent the relationship among variables. This paper presents a Dynamic Bayesian Network implementation to infer the student's algebraic knowledge. It also describes the steps that we followed to get the information about the network probabilities, as well the evaluation conducted with the network. The evaluation results showed statistically significant similarities between the network inference and percentage of correctness in the post-test, performed by students.*

Resumo. *Componentes de inferência de conhecimento são uma parte importante na construção de Sistemas Tutores Inteligentes, pois permitem ao sistema ter uma base do que cada aluno conhece e, desta forma, adaptar a instrução. Na literatura é comum o uso de Redes Bayesianas para realizar este tipo de inferência, uma vez que as mesmas são capazes de lidar com incertezas e também representar a relação entre as variáveis. Este trabalho apresenta uma modelagem de Rede Bayesiana Dinâmica para a avaliação do conhecimento algébrico do estudante. São descritas as etapas de levantamento de informações para obtenção das probabilidades desta rede, bem como as etapas das avaliações conduzidas com a mesma. Os resultados da avaliação mostraram similaridades estatisticamente significativas entre a inferência da rede e os percentuais de acerto, por parte dos estudantes, no pós-teste.*

1. Introdução

Sistemas Tutores Inteligentes (STI) são *softwares* educacionais que usam algoritmos e ferramentas de inteligência artificial para personalizar a instrução e assistência de acordo com as características dos alunos[1]. Através da interação com os alunos (resolução de exercícios, pedidos de ajudas, comportamentos, etc), o sistema os avalia, identificando seus conhecimentos e estados afetivos, e adapta a instrução, exercícios e ajudas de acordo. Para tanto, esses sistemas possuem estruturas para representar o domínio ensinado, bem como para modelar e inferir o conhecimento dos estudantes e seus estados afetivos.

O componente do STI responsável por inferir o conhecimento do estudante é o Modelo de Aluno [Woolf 2008]. Ele é também responsável pela manutenção de qualquer informação referente ao aprendiz. Este processo de avaliação do conhecimento,

[1]No presente artigo, os termos "aprendiz", "aluno" e "estudante" são empregados como sinônimos.

DOI: 10.5753/cbie.sbie.2015.987

também chamado de processo de diagnóstico, ocorre durante a resolução dos exercícios pelo aluno, uma vez que as respostas submetidas pelo alunos são as únicas evidências de conhecimento que são demonstradas ao sistema [Vanlehn 2006]. Desta forma, quanto mais detalhadas estas forem, melhor será a inferência.

Na literatura, é muito comum o uso de Redes Bayesianas e Redes Bayesianas Dinâmicas para a realização deste tipo de inferência, uma vez que essas estruturas são adequadas para realizar inferências com dados incertos, tal como o conhecimento humano. Através delas, o conhecimento é modelado de forma a estabelecer uma relação de precedência, o que permite modelar conceitos que sejam pré-requisitos de outros. Desta forma, é possível inferir que conteúdos o estudante já está apto para começar a estudar.

Este artigo descreve o desenvolvimento de um componente para avaliar o conhecimento algébrico do estudante, mais especificamente os conceitos e as operações referentes a equações de 1º grau, juntamente com as principais falsas concepções. Este trabalho diferencia-se dos demais pesquisados por utilizar as etapas da tarefa (ou passos) como evidência para o componente, ao invés de apenas o resultado final da tarefa [Millán et al. 2013, Duijnhoven 2003]. Esta característica, juntamente com o fato de utilizar uma Rede Bayesiana Dinâmica, torna o modelo desenvolvido independente de problema. Deste modo, a Rede Bayesiana utilizada não necessita ser restruturada caso uma nova equação seja inserida no sistema.

Este trabalho está organizado como segue. A seção 2 apresenta conceitos sobre Redes Bayesianas e, mais especificamente, Redes Bayesianas Dinâmicas, estrutura adotada neste trabalho para diagnóstico do conhecimento do aprendiz. Na seção 3, são listados os trabalhos relacionados. O trabalho desenvolvido é descrito na seção 4, que consta a elaboração da rede e as etapas realizadas para o levantamentos das probabilidades da mesma. A seção 5 relata as etapas de avaliação desta rede, e finalmente, na seção 6, as considerações finais e trabalhos futuros são apresentados.

2. Redes Bayesianas

Redes Bayesianas (RB) são modelos probabilísticos utilizados para descrever a relação entre variáveis aleatórias. Representam, de forma compacta, a distribuição conjunta de probabilidades de um conjunto de variáveis [Russell e Norvig 2002]. Estas estruturas são amplamente utilizadas na área de modelagem de usuário (*User Modeling*), uma vez que são capazes de lidar com incerteza, característica de dados relacionados ao conhecimento humano. Outra vantagem das RBs é a sua capacidade de representação da relação de dependência entre as variáveis.

Estruturalmente, as RBs são representadas através de um Grafo Dirigido Acíclico, cujos **vértices** representam as variáveis e as **arestas**, as relações de dependência entre as variáveis. Cada variável pode assumir um conjunto finito de valores, denominados estados, que possuem determinadas probabilidades de ocorrência. Estas probabilidades estão definidas nas tabelas presentes em cada vértice (ou nodo) e definem as probabilidades condicionais de cada relação. Por exemplo, se uma variável Y estende uma aresta para X, então as probabilidades de X estão condicionadas a Y, ou seja, sua probabilidade é definida por $P(X|Y)$ [Pearl 1988].

2.1. Redes Bayesianas Dinâmicas

RBs são empregadas na realização de inferências momentâneas, tal como verificar o comportamento de uma determinada variável dada uma situação específica. Por exemplo: "Dado que um estudante resolveu corretamente 80% dos exercícios de soma de frações, o quanto, neste momento, é possível afirmar que ele conhece deste assunto?".

Porém, nos casos em que é desejável acompanhar a evolução de algum processo, é necessário usar outro tipo de RB. Por exemplo, "Anteontem um estudante resolveu corretamente 80% das operações de soma de frações, ontem foram 90%, hoje foram 92%, quais as perspectivas para amanhã?". Para este tipo de inferência ao longo do tempo, nos quais os estados das variáveis se alteram, porém as ações anteriores influenciam nas ações futuras, há um tipo específico de RB que se mostra mais efetivo: as Redes Bayesianas Dinâmicas (RBDs) ou Redes Bayesianas Temporais.

As RBDs introduzem o conceito de *time-slice*, ou instante de tempo. Um *time-slice* representa a ocorrência de eventos em um momento no tempo. Para o exemplo anterior, cada dia em que o estudante resolveu as operações de soma de frações poderia ser representado por um *time-slice*. De fato, uma RBD pode ser visualizada como uma sequência de RBs unidas, nas quais cada RB representa um *time-slice*. Este processo é denominado *unrolling* ou desenrolar [Russell e Norvig 2002].

3. Trabalhos Relacionados

Na literatura encontram-se diversos trabalhos referentes à avaliação de conhecimento do estudante empregando RBD. Um dos principais trabalhos é o *Knowledge Tracing*, apresentado inicialmente em [Corbett e Anderson 1994]. Este trabalho avalia, de forma individual, cada unidade de conhecimento do aprendiz. A primeira versão do trabalho empregava cálculos de probabilidades. Posteriormente, ele foi portado para uma estrutura de RBD, conforme explicado em [Reye 2004]. Estudos mais recentes [Yudelson et al. 2013] buscam tornar este modelo mais adaptável para cada estudante, através dos ajustes do parâmetro de taxa de aprendizado $P(T)$.

No domínio de Álgebra, encontram-se igualmente os trabalhos de [Millán et al. 2013] e [Duijnhoven 2003], que utilizam abordagens diferentes para realizar a avaliação do conhecimento dos alunos. O primeiro utiliza uma RB para avaliar o conhecimento declarativo (conceitos algébricos), atribuindo um nodo para indicar o percentual geral de conhecimento, do aluno, em equações de 1º grau. O segundo avalia, também através de uma RB, o conhecimento procedural unido às principais falsas concepções do estudante, classificando-o em um dos três grupos de nível de conhecimento: alto, médio ou baixo. Uma característica comum aos dois trabalhos está na evidência utilizada em suas RBs: ambos empregam itens de avaliação para o diagnóstico, ou seja, atividades e exercícios.

Conforme apresentado anteriormente, o trabalho proposto apresenta um componente para avaliar o conhecimento algébrico do estudante. Este apresenta como diferencial a sua capacidade de avaliar tanto o conhecimento conceitual (declarativo), quanto o procedural do estudante, utilizando um modelo de inferência que é independente de problemas (equações). Esta independência de problemas também é observada no *Knowledge Tracing*, porém o mesmo não modela as relações de pré-requisitos entre as uni-

dades de conhecimento; ele as analisa de forma individualizada. Deste modo, o conhecimento de um conceito/operação x_1 não influencia na probabilidade do estudante saber outro conceito/operação x_2. Como, na álgebra, há esta relação de dependência entre as operações, essa característica é desejável, pois permite uma maior precisão na inferência do conhecimento.

4. Metodologia

O presente trabalho consiste em um componente de avaliação do conhecimento algébrico do estudante. Como diferencial, o trabalho infere dois tipos de conhecimento do estudante: o conhecimento declarativo (os conceitos algébricos) e o conhecimento procedural (as operações algébricas). Esses tipos de conhecimento estão estruturados em uma RBD, que representa igualmente a relação de pré-requisitos entre eles. São utilizadas como evidência: a) as **operações algébricas**, que são aplicadas pelos estudantes ao resolver uma etapa de uma equação; e as b) **principais falsas concepções** identificadas em cada etapa. Ambas as informações são inferidas por um sistema especialista, a partir do passo anterior e do passo atual da equação, fornecidos pelo aluno durante a resolução passo-a-passo. Através deste tipo de evidência, é possível modelar um componente de inferência que seja independente de equações, ou seja, este modelo pode ser aplicado para avaliar o conhecimento algébrico dos estudantes sem a necessidade de alterá-lo para cada tipo de equação que for resolvida.

A independência de problemas é possível porque o modelo proposto foi concebido para ser integrado a um *step-based tutor*, ou seja, um tutor que auxilia o estudante a resolver uma tarefa passo-a-passo, oferecendo auxílio em cada uma das etapas. Este tipo de tutor geralmente possui um sistema especialista que detecta as operações aplicadas pelo estudante, ao resolver um passo do problema, e, também, identifica as suas principais falsas concepções. Este sistema especialista é responsável por encaminhar à rede as informações necessárias.

Desta forma, uma vez integrado ao STI, o processo de avaliação de conhecimento ocorrerá durante a resolução das tarefas da seguinte maneira:

1. A RBD é inicializada em t_0;
2. O STI apresenta uma equação para o aluno resolver: por exemplo, $2x = -3$;
3. O estudante submete a etapa (passo): $x = \frac{2}{-3}$;
4. O sistema especialista do STI identifica uma falsa concepção no princípio multiplicativo, no passo do aluno;
5. O STI informa a RBD da ocorrência desta falsa concepção;
6. Na rede, em t_1, são apresentadas as evidências de ocorrência da falsa concepção no princípio multiplicativo, e a evidência de que o mesmo foi aplicado incorretamente;
7. O estudante recebe um *error feedback*, indicando um erro no passo;
8. O estudante corrige a etapa: $x = \frac{-3}{2}$;
9. O sistema especialista identifica que o princípio multiplicativo foi aplicado corretamente no passo;
10. Essa informação é apresentada como evidência na RBD, no *time-slice* t_2;
11. O estudante recebe um *feedback* mínimo positivo (geralmente um simbolo de correto), indicando que o passo está correto;

12. A resolução da equação é encerrada.

Após a execução destas etapas, o *time-slice* t_2 representará a inferência atual da RBD para o conhecimento do aluno, sendo que cada nó conterá a probabilidade de conhecimento do aluno para cada unidade de conhecimento representada pela RBD. Cada *time-slice* representa o conhecimento do estudante em cada momento da resolução, conforme apontado pelas evidências até aquele momento.

4.1. Estrutura da Rede Bayesiana

Esta rede foi elaborada segundo a estrutura causal das RBs. Deste modo, a relação entre os nodos define que o conhecimento de um conceito/operação implica na possibilidade de o aluno compreender um conteúdo seguinte, ou seja, relação de pré-requisitos entre os conhecimentos. A estrutura da rede é mostrada na Figura 1. Esta foi elaborada de acordo com entrevistas realizadas com professores de matemática, conforme descrito em [Seffrin e Jaques 2014].

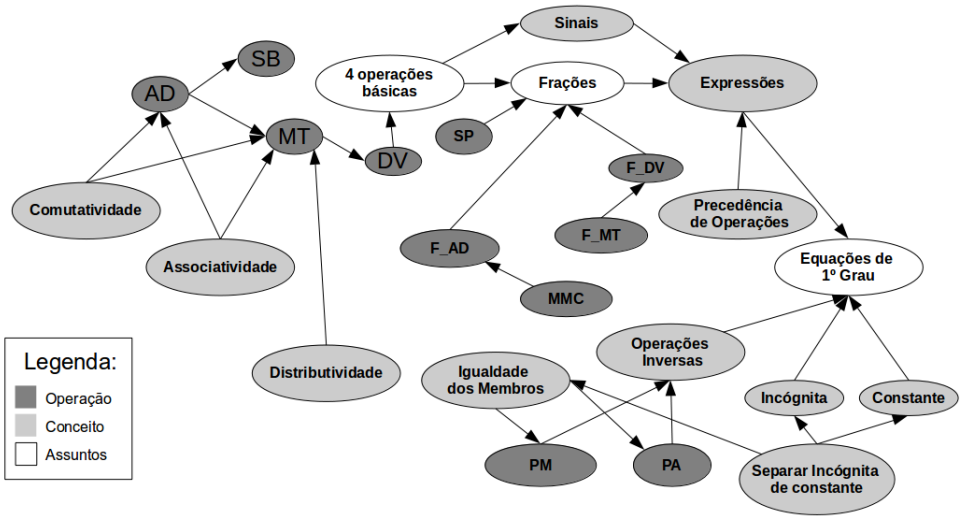

Figura 1. Estrutura da Rede Bayesiana

Nesta modelagem, por exemplo, se um aluno conhece a regra do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), então ele possui um certo grau de probabilidade de compreender a regra da Soma de Frações (F_AD). Da mesma forma, se ele conhece o conceito "Igualdade dos Membros", ele provavelmente conhece os princípios aditivo (PA) e multiplicativo (PM). O oposto também é verdade: se o aluno conhece a Divisão de Frações (F_DV), ele também conhece a Multiplicação de Frações (F_MT), uma vez que esta segunda é requisito para a primeira.

4.2. Probabilidades Condicionais

Conforme apresentado na seção 4.1, a rede foi estruturada de modo a definir a precedência entre as operações. Desta forma, as probabilidades condicionais definem as chances que um aluno tem de compreender determinado conteúdo, dados os pré-requisitos deste conteúdo. Por exemplo, as probabilidades do aluno entender os princípios aditivo (PA) e multiplicativo (PM) estão diretamente relacionadas à probabilidade de o estudante compreender o conceito "Igualdade dos Membros".

Para obter estes dados, foram realizadas entrevistas com três professores de matemática com mais de cinco anos de experiência no ensino fundamental. Para facilitar a obtenção destes dados, utilizou-se um modelo de questionário apresentado em [van der Gaag et al. 1999]. Este modelo apresenta uma descrição textual da probabilidade a ser obtida e uma escala numerada com as probabilidades e termos que expressam estes valores, tais como "Com Certeza" (100%), "Provável" (85%) e "Quase Impossível" (0%).

A probabilidade de um nodo é igual ao somatório dos pesos dos nodos que o influenciam. Portanto, a probabilidade condicional do nodo de Adição (AD) vai ser igual a soma dos pesos das propriedades Comutativa e Associativa, sendo que esses pesos foram obtidos através dos questionários.

No entanto, por tratar-se de uma RBD, também são necessárias as probabilidades relacionadas à parte temporal, bem como as probabilidades relacionadas às evidências. Para isto, baseados no *Knowledge Tracing*, foram definidos parâmetros de configuração: o conhecimento inicial ($P(L_0)$), a taxa de *guess* ($P(G)$), a taxa de *slip* ($P(S)$) e a taxa de transição do estado "Não Aprendeu" para o estado "Aprendeu" ($P(T)$), também denominada de Taxa de Aprendizado, conforme [Reye 2004]. Este mesmo autor também define uma Taxa de Lembrança, que representa as chances de o aluno reter o conhecimento na transição de um *time-slice* para o outro. Este parâmetro também foi incorporado à configuração da rede. Finalmente, foram definidos parâmetros para determinar o quanto os pesos dos pré-requisitos irão influenciar o nodo.

5. Avaliação da Rede

Estando finalizada a rede, a próxima etapa foi verificar a sua capacidade de inferência. Como não havia uma integração entre a rede e o STI até o momento em que este foi aplicado sala de aula, os dados obtidos nesta escola foram armazenados e, posteriormente, repassados à rede. O processo foi similar ao que ocorreria se houvesse uma integração entre a RBD e o STI. Após, o diagnóstico da rede foi comparado com um pós-teste, realizado pelos mesmos alunos, de modo a verificar a similaridade entre os dados.

5.1. Obtenção dos Dados

No segundo semestre de 2014, o projeto PAT2Math fechou um parceria com uma escola de ensino fundamental e médio para o uso do STI na disciplina de matemática. O STI foi aplicado nas turmas em que os estudantes estavam aprendendo o conteúdo relacionado à resolução de equações de 1° grau. Dessa forma, o STI foi utilizado pelas duas turmas de 7º ano daquela escola, totalizando 59 alunos. Na prática, os estudantes tinham aulas teóricas em dois dias da semana e na sexta-feira se dirigiam ao laboratório de informática da escola, sob a supervisão da professora, para resolver equações de 1º grau no PAT2Math. O uso do STI, efetivamente, ocorreu nos meses de Outubro e Novembro de 2014, totalizando 7 seções de uso. As seções tinham duração de 50 minutos, o que totalizava um período de aula (para cada turma).

As equações estavam agrupadas em nove planos de aula, organizadas por nível de dificuldade. O Plano 1 apresentava as equações de menor complexidade para o aluno resolver (por exemplo, $x + 4 = 10$) e o Plano 9 continha as equações mais difíceis (tal como, $-3 \times (x + 4) + 4 \times (x - 9) = 12$), o qual poucos alunos atingiram. Os estudantes poderiam livremente decidir a ordem em que resolviam as equações dentro do plano

atual, porém o próximo plano somente era liberado quando ele tivesse resolvido todas as equações do plano corrente.

Todas as respostas submetidas pelos estudantes foram registradas no banco de dados no sistema. Posteriormente, estes dados foram analisados e organizados em arquivos *Comma-separated values* (CSV), dois para cada aluno (operações e falsas concepções), totalizando 118 arquivos.

Logo após o final do período de utilização do sistema, na primeira semana de Dezembro, os alunos resolveram um pós-teste como parte da avaliação do PAT2Math. Estes pós-testes também foram utilizados para validar a capacidade de inferência da rede. Para cada turma foi aplicado um pós-teste diferente, com 11 equações cada, e com variados níveis de dificuldade, do mesmo etilo das equações resolvidas no STI. Os alunos tiveram 50 minutos para resolver o pós-teste.

Como parte do processo de avaliação da rede, cada teste foi analisado, com o objetivo de obter o percentual de acerto de cada estudante, em cada operação de 1º grau. Dos 59 alunos que utilizaram o STI, 49 deles resolveram os pós-testes (10 alunos não estavam presentes no dia). Nesta análise, constatou-se a aplicação das operações de Adição, Subtração, Multiplicação, Propriedade Distributiva, Simplificação de frações, Princípio Aditivo, Princípio Multiplicativo, MMC e, raramente, a Soma de Frações.

5.2. Resultados

Calculados os percentuais de acerto de cada aluno, os seus respectivos arquivos CSV de registro foram selecionados e submetidos à análise da RBD. O processo ocorreu de forma similar a como ocorreria se ela estivesse integrada ao PAT2Math. Cada linha do arquivo representa a submissão de um passo de resposta pelo estudante. Essa resposta era analisada pelo sistema especialista, que identificou as operações aplicadas ou a respectiva falsa concepção.

Estes resultados foram inseridos na rede da seguinte forma:

- Se o passo estava **correto**, então o nodo de evidência da operação que foi empregada corretamente (nome iniciado por "Passo_"), inferida pelo sistema especialista do STI, é instanciado com o estado "*Correct*", e os nodos das falsas concepções correspondentes (nome iniciado por "Misc_") são instanciados com o estado "*False*", indicando a não ocorrência.
- Se o passo estava **incorreto**, então o nodo da Falsa Concepção associada, inferida pelo sistema especialista, é instanciado com o estado "*True*", o nodo de evidência da operação correspondente a ela é instanciado com o estado "*Incorrect*", e as demais Falsas Concepções, relacionadas a esta operação, são instanciadas com o estado "*False*".

Após a execução da rede, os percentuais obtidos nos nodos de cada operação foram comparados com os percentuais obtidos a partir da análise dos pós-testes. Uma vez que o pós-teste reflete o atual conhecimento do aluno, é desejável que a rede chegue a uma inferência similar. Elaborou-se, então, um histograma com as principais operações observadas nos pós-testes, como mostra a Figura 2(a). Neste histograma foi calculada a diferença absoluta entre os resultados da rede e o percentual de acerto dos estudantes. Quanto menor o valor, menor a diferença entre a rede e o atual conhecimento do

aluno, refletido pelo pós-teste. A operação de soma de frações (F_AD) foi omitida deste histograma por não fornecer dados suficientes para uma comparação efetiva (uma vez que poucos alunos chegaram no último plano, que continha equações que envolviam essa operação).

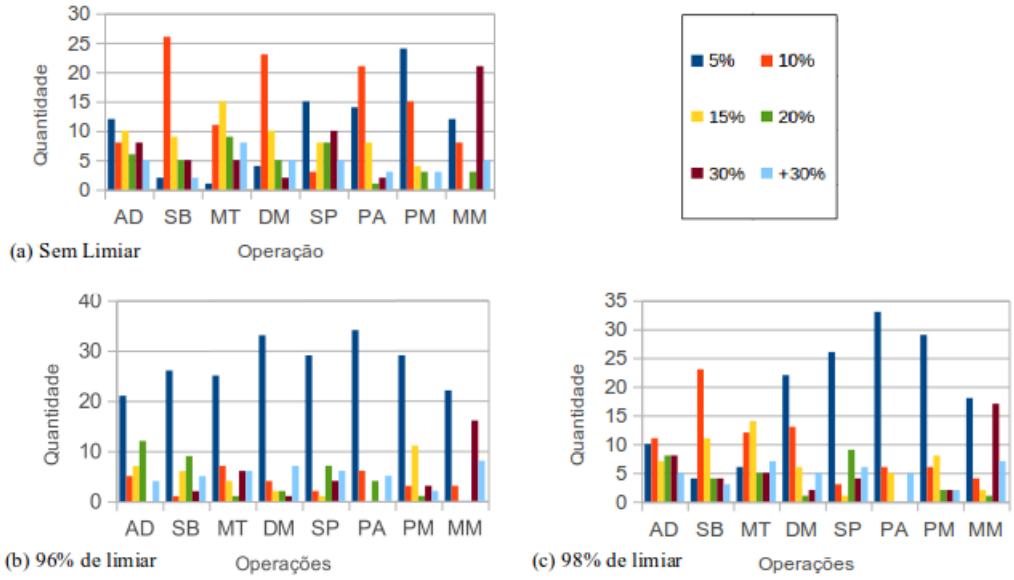

Figura 2. Histogramas das execuções da rede

Observa-se neste histograma (Figura 2(a)) que não há uma grande presença de valores no intervalo de 5%, que é o mais desejável, pois indica uma diferença máxima de 5% entre a rede e o pós-teste. Isto ocorre devido à limitação que necessite que a rede seja reiniciada por questões de desempenho, ou seja, após 20 *time-slices* ela deve voltar a t_0. Na reinicialização, somente a informação do último *time-slice* é repassada adiante. Visando reduzir esta perda de informações, adotou-se uma política de limiares. Se uma porcentagem em algum nodo, com exceção dos nodos de evidência, ultrapassar este valor de limiar, então a variável é instanciada com o estado *"Knows"* no *time-slice* correspondente.

Mais duas execuções da rede foram realizadas, cada uma com um valor diferente de limiar: 96% e 98%, originando os histogramas das Figuras 2(b) e 2(c), respectivamente. Observa-se nestes histogramas que o limiar de 96% produziu um resultado mais desejável, ou seja, maior presença de valores no intervalo de 5%.

Por fim, foi necessário verificar se os resultados da rede e dos pós-testes são equivalentes estatisticamente. Aplicou-se, nesse caso, o *two one-sided test*, que define um intervalo δ_1 e δ_2. Para que os dados sejam equivalentes, as hipóteses nulas (($\mu \leq \delta_1$) e ($\mu \geq \delta_2$)) devem ser rejeitadas. No presente trabalho, o símbolo μ representa a diferença entre as amostras da rede e do pós-teste. Se as hipóteses nulas forem rejeitadas, μ estará dentro do limite δ_1 e δ_2 e os dados serão considerados equivalentes. Para que as hipóteses nulas sejam rejeitadas é necessário que os valores P_1 e P_2 (que representam a probabilidade dos dados serem considerados equivalentes, quando não o são) sejam menores que

Intervalo de Equivalência					
δ	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
AD	P=0,192	P=0,002	—	—	—
SB	P=0,586	P=0,044	—	—	—
MT	P=0,402	P=0,045	—	—	—
DM	P=0,798	P=0,29	P=0,03	—	—
SP	P=0,888	P=0,346	P=0,024	—	—
PA	P=0,725	P=0,163	P=0,006	—	—
PM	P=0,77	P=0,129	P=0,002	—	—
MM	P=0,272	P=0,039	—	—	—

Tabela 1. Resultados do Teste de Equivalência para a versão com 96% de limiar

α, que, neste trabalho foi de $0,05$, portanto um intervalo de confiança de 95%. A Tabela 1 mostra os resultados do teste de equivalência para o limiar de 96% (as tabelas das outras duas execuções foram suprimidas por questões de espaço). A equivalência foi comprovada com um δ máximo de $0,15$, o que não ocorreu nas outras execuções, nas quais ambas obtiveram um δ máximo de $0,2$.

6. Conclusão

Ser capaz de identificar o conhecimento de cada aluno permite aos STIs adequarem os seus conteúdos aos mais diversos tipos de estudantes, personalizando o ensino e assistência de acordo com as características, habilidades e dificuldades de cada um. Atualmente, diversos trabalhos utilizam as Redes Bayesianas para realizar este tipo de inferência devido a sua capacidade de lidar com incertezas.

O grande desafio deste trabalho foi modelar o conhecimento algébrico, de forma que una tanto os conhecimentos declarativos (conceitos algébricos), os conhecimentos procedurais (operações) e as principais falsas concepções dos estudantes. Também buscou-se definir as probabilidades para cada nodo desta rede mantendo o desempenho da mesma, uma vez que, ao aumentar, consideravelmente, o número de *time-slices* da rede, o seu desempenho diminui drasticamente. Desta forma, outras estratégias foram empregadas para contornar esta queda de desempenho, como o limite máximo de *time-slices* e a política de limiares.

A independência de exercício também é uma característica importante do trabalho. Nos trabalhos pesquisados, as atividades eram utilizadas como evidências, exigindo, portanto, que a cada novo exercício inserido no sistema, novos nodos também fossem integrados na rede. Esses nodos de evidência representavam a (in)correta resolução de cada exercício. Ao adotar a estrutura dinâmica e as operações como evidências, cada *time-slice* representa a (in)correta aplicação de uma operação de 1º grau. Como toda equação de 1º grau é resolvida por um subconjunto destas operações, não há informação nova para ser inserida na rede.

Os resultados das avaliações mostraram um melhor desempenho na rede em que foi aplicada um limite menor de limiar (96%). A sua equivalência foi mostrada através de testes estatísticos. Optou-se por não selecionar um valor muito baixo de limiar, pois ocorreria de o aluno ser considerado conhecedor de determinado conteúdo muito rapidamente. Por isto, foi usado um valor relativamente alto para o limiar, mas que apresentasse resultados interessantes.

Como trabalhos futuros, pretende-se integrar este componente ao STI PAT2Math,

de modo que seja possível realizar avaliações em sala de aula. Busca-se igualmente incluir outros conceitos à rede, que foram observados durante as interações dos alunos com o sistema, tais como, o conceito de número fracionário, o significado da fração; a operação fração inversa, aplicada na divisão de frações juntamente com a multiplicação de frações; etc. Futuramente, objetiva-se igualmente agregar as operações e conceitos relativos à resolução de equações de 2º grau, dado que na versão atual o domínio limita-se à resolução de equações de 1º grau.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio dos seguintes órgãos de fomento à pesquisa: CNPq e FAPERGS

Referências

Corbett, A. e Anderson, J. (1994). Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge. *User modeling and user-adapted interaction*, 4(4):253–278.

Duijnhoven, J. V. (2003). Knowledge assessment using bayesian networks: A case study in the domain of algebraic expectation. Master's thesis cognitive artificial intelligence, Utrecht University, Utrecht.

Millán, E., Descalço, L., Castillo, G., Oliveira, P., e Diogo, S. (2013). Using Bayesian networks to improve knowledge assessment. *Computers & Education*, 60(1):436–447.

Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA.

Reye, J. (2004). Student modelling based on belief networks. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 14(1):63–96.

Russell, S. J. e Norvig, P. (2002). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition.

Seffrin, H. e Jaques, P. (2014). Modelando o conhecimento algébrico do estudante através de redes bayesianas dinâmicas. In *Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Dourados, MT. Sociedade Brasileira de Computação.

van der Gaag, L., Renooij, S., Witteman, C., Aleman, B., e Taal, B. (1999). How to elicit many probabilities. In Laskey, K. B. e Prade, H., editors, *Proceedings of Fifteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence, UAI*, number 1999-15, pages 647–654, San Francisco, CA,. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Vanlehn, K. (2006). The Behavior of Tutoring Systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 16(3):227–265.

Woolf, B. P. (2008). *Building intelligent interactive tutors*, volume 3. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA.

Yudelson, M. V., Koedinger, K., e Gordon, G. J. (2013). Individualized Bayesian Knowledge Tracing Models. In *Proceedings of Artificial Intelligence in Education*, volume 7926 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 171–180, Memphis, TN. Springer Verlag.