

Classificação automática de erros de aprendizes humanos do processo de indução analítica

Gustavo Bazzo¹, Alexandre Direne¹, Diego Marczal¹

¹Departamento de Informática – Universidade Federal do Paraná (UPFR)
Caixa Postal 19.081 – 81.531-980 – Curitiba – PR – Brasil

gustavo@youse.com.br, alexd@inf.ufpr.br

Resumo. *O problema da classificação automática de erros no processo de indução analítica dos humanos é exposto de maneira crítica em relação ao contexto da aprendizagem formal da matemática. As principais limitações de outras pesquisas existentes são apontadas em relação à concepção de modelos dinâmicos de aprendizes em sistemas tutores inteligentes. Os aspectos metodológicos de uma solução factível para o problema proposto são identificadas com base em métricas genéricas que se aplicam às diferenças entre expressões matemáticas erradas e corretas. Uma implementação do modelo estudado é feita com base em dados experimentais coletados de aprendizes reais e submetidos à análise de especialistas no ensino de indução analítica. Os principais resultados apontam para índices de 87% de acerto na classificação automática. Metas futuras de pesquisa são delineadas no sentido de monitorar a evolução do desempenho acadêmico dos aprendizes por longos períodos.*

Abstract. *The problem of automatic classification of human errors in the process of analytic induction is laid out as critical relations of formal learning contexts of mathematical concepts. The main limitations of past research are spotted in relation to the concepts of dynamic learner modelling in intelligent tutoring systems. Methodological aspects of a feasible solution to the proposed problem are identified on the basis of generic measures which apply to differences between wrong and correct mathematical expressions. An implementation of the model is carried out using experimental data collected from real learner and submitted to experts in analytic induction teaching to be analysed. The results point to an 87% hits in automatic classification. Future research aims are outlined as an effort to track learners' performance during long periods of time.*

1. Introdução

O objetivo geral deste projeto de pesquisa e desenvolvimento está na utilização do estado-da-arte na modelagem dinâmica de aprendizes em sistemas tutores inteligentes para oferecer apoio tecnológico e pedagógico adaptado ao trinômio aprendiz-professor-conteúdo. Neste contexto, o apoio significa o monitoramento de longo prazo do aprendiz em relação aos erros cometidos na solução de problemas. O domínio específico de problemas tratado pelo sistema tutor é o de classificação de erros no campo da matemática denominado *indução analítica*. É importante destacar desde já que um erro desse tipo pode ser mascarado por erros de naturezas algébrica, aritmética, geométrica e outras. Isso causa enormes dificuldades de representação e de operação, tanto para o aprendiz humano como

para uma máquina. Para efeito de simplificação da classificação, apenas três tipos de erros de indução analítica serão considerados neste trabalho: (a) subgeneralização; (b) supergeneralização; (c) não se aplica (é um erro de outra natureza).

Para a expressão correta $\frac{l}{2^n}$, um exemplo de erro da classe de subgeneralização é $\frac{l}{n^2}$. Adicionalmente, para a expressão correta $\frac{l}{8}$, um exemplo de erro da classe de supergeneralização é $\frac{l}{8 \times n}$. Cabe ainda dizer que, para a expressão correta $\frac{l}{2^n}$, um exemplo de erro que não se aplica a nenhuma das duas classes citadas anteriormente é $\frac{l}{16 \times 2^n}$.

Vários estudos foram conduzidos ao longo dos anos a respeito das diferenças fundamentais entre aprendizes de indução analítica nos níveis inicial, intermediário e avançado. Os estudos consideraram tanto a relação da indução analítica com conceitos mais básicos da matemática (*e.g.*, aritméticos, algébricos e geométricos) quanto a modelagem dinâmica de aprendizes onde a mobilidade em redes virtuais catalisa atividades de aprendizagem com apoio inteligente [Sharples et al. 2002]. Trabalhos mais recentes apenas especulam sobre a adequação de certas ferramentas para apoiar à aprendizagem com mobilidade [Graziola 2009]. Na medida do possível, a incorporação de resultados de pesquisa básica em psicologia cognitivista tem sido tentada como forma de cobrir o grande espaço existente entre campos interdisciplinares de desenvolvimento da indução analítica em ambiente escolar. Tal cobertura pode ser atingida com base em semelhanças conceituais entre, por exemplo, o processo de aquisição de conhecimentos de matemática e de estratégias de jogos heurísticos [Lesgold 1984].

Pesquisas passadas sugerem que um indivíduo passa por diversos estágios durante a aquisição de conhecimento e competência em indução analítica [Ainsworth 2006]. Iniciantes aprendem a associar sinais para guiar a face operativa do acesso aos conteúdos de uma expressão. Na medida em que se tornam mais experientes, aprendizes desenvolvem uma abordagem, baseada em métodos indutivos, mais sistemática de composição de operadores para sintetizar expressões que resolvem problemas. Tais procedimentos podem ser resumidos em três passos: (a) estimativa rápida das expressões constituintes dos passos intermediários da solução à procura de características comuns que indiquem um arranjo ou padrão operativo familiar; (b) formação de uma hipótese inicial a respeito da composição de operadores e variáveis da expressão final; (c) busca sistemática de novas características operativas que venham a reforçar ou refutar a hipótese de síntese adotada.

Usuários avançados são capazes de usar a abordagem hipotético-dedutiva quando necessário mas também desenvolvem com o tempo uma enorme habilidade para rápidas comparações de padrões sintáticos dos dados de um enunciado. Tal habilidade se baseia em um volumoso estoque de esquemas mentais de natureza metacognitiva [Gobet and Campitelli 2006, Klock et al. 2010], destinados a controlar de formas diferentes a busca por um conteúdo equivalente mais resumido. Ao contrário dos iniciantes, os usuários avançados usam esquemas fortemente associados às operações das expressões intermediárias da solução de um problema e têm sólidas representações mentais da estrutura de precedências dos operadores assim como de seus operandos, sejam eles variáveis ou constantes.

Os estudos sobre diferenças entre iniciantes e avançados no tema de mobilidade educacional [Sharples et al. 2002] indicam que os usuários de nível intermediário de competência necessitam de especial assistência na identificação dos operadores críticos da formação de uma hipótese a respeito de um enunciado de problema. Além disso, eles também carecem de ajuda na indicação de evidências para a confirmação da eficácia da opção pretendida para serem os operandos desses operadores.

A construção de sistemas tutores inteligentes capazes de apoiar essa integração de fatores ainda é relativamente rara, mas algumas tentativas anteriores já demonstraram resultados parciais animadores [Bull and Kay 2007]. Os resultados positivos são advindos de trabalhos em software construído com alguma inteligência isolada para ajudar o ensino. Todavia, em geral, as visões mais modernas de contribuição da Inteligência Artificial aplicadas à Educação têm sido voltadas à aprendizagem muito mais do que ao ensino e, nesses casos, geralmente focalizam jogos intelectivos como objetos de estudo da solução de problemas por parte de um aprendiz [Feitosa and outros 2007, Sá et al. 2007].

2. Resenha literária sobre diagnóstico automático de erros do aprendiz

Em teoria, os erros cometidos por aprendizes humanos podem ser visualizados em uma estrutura de três níveis, tais como foram descritos por Sison e Shimura [Sison and Shimura 1998]. Em ordem crescente de generalização, os erros podem ser rotulados por: comportamento, conhecimento e aprendizagem. No nível comportamental são capturadas divergências entre o comportamento desejado e o comportamento do aprendiz, tipicamente com base em erros sintáticos. O segundo nível visa analisar as causas das divergências geradas no primeiro nível. Através dessa análise é que classes de erros e outros tipos de equívocos são identificados. Ainda no segundo nível, os equívocos podem representar conceitos incorretos, inconsistentes, falta de conhecimento, deslizos causados por fadiga, tédio e distração. No nível de aprendizagem o objetivo é descobrir e explicar as origens e ramificações dos erros identificados nos níveis inferiores.

A classificação dos erros de aprendizes em níveis é importante para que seja possível tratá-los com explicações e instruções adequadas. Dessa forma, pesquisas passadas definiram abordagens específicas para a correção dos erros de acordo com seu nível. Por exemplo, ao invés de remediar caso a caso todos os erros que surgem dos aprendizes, tais erros foram agrupados em classes bem definidas e identificados em todas as suas causas. Assim, soluções puderam ser compostas para cada grupo de erros. Esse foi um dos principais objetivos dos sistemas especialistas em modelagem de aprendizes [Self et al. 1990].

O sistema tutor inteligente de ensino da geometria de John Anderson [Anderson et al. 1985] é um bom exemplo de sistema equipado com diagnóstico automático de erros de aprendiz. O programa dispõe de um editor de texto apropriado para a codificação da linguagem de programação, o qual também é utilizado pelo tutor para interação com o aprendiz. Seu conhecimento é baseado em regras de produção. Ele não possui modelagem dinâmica de aprendizes porém utiliza um modelo ideal que representa todo o conhecimento que supostamente o aprendiz deve adquirir. O sistema possui também um controlador de interação passo-a-passo que permite ao sistema tutor intervir imediatamente diante do erro do aprendiz. Isso é feito através de mensagens apropriadas após identificação dos erros e das dicas para auxiliar a resolução de problemas.

Já o ACT é uma teoria cognitivista cujo objetivo é prever o comportamento humano na aquisição e processamento de conhecimento. Seu arcabouço inclui mecanismos de raciocínio, aprendizagem e rejeição de modelos não plausíveis ao comportamento humano. Por essas características, o ACT-R tornou-se útil no passado por sua aplicação na camada de simulação da aprendizagem humana em vários níveis de erros pois é capaz de explicar o motivo do comportamento errático do aprendiz. Provavelmente, seu principal mérito está em conseguir integrar representações de conhecimento simbólico e sub-simbólico, utilizando técnicas de aprendizagem de máquinas baseadas em redes neurais. O ACT-R alcançou sucesso na comunidade científica e atualmente conta com os esforços de diversos pesquisadores espalhados pelo mundo. A utilização do ACT-R vai além de sistemas tutores inteligentes, existindo pesquisas de sua aplicação na área de interface humano-máquina [Sison and Shimura 1998, Anderson 1982, Taatgen et al. 2006].

Outra teoria cognitivista que pode ser utilizada para explicar a formação dos erros é a REPAIR de VanLehn. Tal como o ACT-R, também pode ser aplicada na camada de aprendizagem dos níveis de erros. Ela visa explicar como os erros são gerados, o que é assumido como hipótese a partir do monitoramento de determinadas habilidades que o aprendiz deveria possuir. A base do referido monitoramento está no fato do aprendiz chegar a um impasse na resolução de determinado problema e aplicar estratégias (reparos) para superar a situação. Para simular o cenário anterior são definidos conjuntos de resoluções incompletas, funções heurísticas sobre essas soluções e suas restrições de acordo com o enunciado dos problemas experimentais. Através destes recursos foi possível descrever a origem e as ramificações de erros em operações aritméticas, tipicamente as de subtração e divisão. A teoria REPAIR foi implementada no programa SIERRA [Sison and Shimura 1998, Brown and VanLehn 1980] com grande sucesso na explicação de erros aritméticos cometidos quase invariavelmente por aprendizes em diversos países do mundo. Todavia, nenhum modelo cognitivista abordou o diagnóstico e a classificação de erros de indução analítica, tais como os descritos na seção anterior deste artigo.

3. Hipóteses simplificadoras

3.1. Redutibilidade da caracterização de erros analíticos

Devido à grande amplitude de caminhos para a solução do problema apresentado na introdução deste artigo, surge a necessidade de criar fronteiras visando determinar o que está dentro e fora da pesquisa. Neste trabalho, foram estudados os erros cometidos por seres humanos durante o processo de aprendizagem de conceitos de indução analítica do campo da matemática. Apenas os erros de indução gerados por um aprendiz durante os passos de resolução de exercícios foram levados em consideração. Optou-se por agrupar tais erros de generalização nas seguintes classes:

- subgeneralização: Ocorre quando o aprendiz não consegue classificar determinado elemento como pertencente a determinada classe conceitual à qual ele realmente se enquadra;
- supergeneralização: Ocorre quando o aprendiz classifica indevidamente determinado elemento como pertencente a determinada classe conceitual, quando na verdade ele não pertence;
- miscelânea: Representa a mistura dos dois erros anteriores;

- não se aplica: Representa todos os outros erros cometidos pelo aprendiz que não se enquadram em erros analíticos, tais como os erros aritméticos, algébricos, geométricos, trigonométricos e outros;

A fase inicial de estudo foi conduzida por meio de entrevistas com especialistas no ensino de matemática do ciclo básico escolar. Após essa fase, foi verificado que não é possível identificar claramente a classe Miscelânea em simples instâncias de erros. Para sua correta identificação, foi preciso analisar vários erros em uma mesma sessão de resolução de exercícios. Portanto, devido a uma simplificação no escopo desta pesquisa (análise de instâncias elementares de erros analíticos), a classe miscelânea foi evitada e sua abordagem foi postergada para trabalhos futuros.

Como hipóteses simplicadoras, foram então abordados apenas os erros de subgeneralização e de supergeneralização analítica presentes de maneira direta em expressões matemáticas. Para tanto, foi utilizado um conjunto de características é específico do domínio de aplicação, cujas métricas são extraídas de cada expressão (ver detalhes na Seção 4. Assumindo-se que seria factível codificar uma função identificadora de cada métrica cujos dados de entrada seriam apenas a expressão matemática errada e a correta, foi possível criar um modelo dinâmico de cada erro analítico.

As hipóteses se confirmaram. O modelo criado traz benefícios como a eliminação de instâncias de erros que não pertencem a nenhuma classificação bem definida (*i.e.*, ruídos) e a redução da complexidade na manipulação da massa de dados formada pelas expressões matemáticas. Na Seção 4 serão fornecidos maiores detalhes sobre o conjunto de características utilizadas nos estudos desta pesquisa.

3.2. Adoção de equivavências algébricas

As expressões matemáticas, principalmente as que possuem termos algébricos, podem possuir diversos componentes (constantes, termos algébricos e operadores). Esses componentes relacionam-se entre si através de regras aritméticas, algébricas, entre outras. Isto faz com que a manipulação ideal das expressões seja de alta complexidade, necessitando de um sistema especializado apenas para lidar com tais equivalências. Portanto para facilitar o processamento das expressões matemáticas e manter o foco da pesquisa, optou-se por uma abordagem heurística não abrange equivalências algébricas.

As heurísticas aplicadas são pontuais e representam o pré-processamento das expressões matemáticas para posterior extração das características citadas anteriormente de forma mais confiável. São elas:

- Eliminação das potências de valor 0 ou 1. Exemplos: $2^1 \Rightarrow 2$ e $2^0 \Rightarrow 1$
- Eliminação de parênteses inúteis. Exemplo: $(2) \Rightarrow 2$
- Manipulação de parênteses com potenciação ou exponenciação. Exemplos: $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{n^2}{2^2}$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{n^n}{2^n}$
- Conversão de literais com potências numéricas. Exemplo: $n^3 \Rightarrow n * n * n$

Com o detalhamento de cada característica, juntamente com a forma de sua extração, o pré-processamento aplicado se tornou menos sujeito a possíveis efeitos negativos de ruídos.

4. O conjunto de características estudadas

Nesta seção são detalhadas as características utilizadas para identificar as classes definidas na seção anterior (subgeneralização, supergeneralização e não se aplica). Toda informação é extraída com base na resolução incorreta de exercícios, analisando duas expressões: a expressão correta (resposta do exercício) e a expressão errada (resposta do aprendiz). É importante ressaltar que todos os atributos extraídos são intrínsecos das expressões matemáticas e foram definidos com o objetivo de aumentar o grau de representatividade dos dados básicos que constituem as hipóteses de classificação de um erro.

Os literais ou termos algébricos (*variáveis*) de uma expressão matemática foram considerados aqui os atributos mais importantes pois, no nível de manipulação de um aprendiz humano, sua manipulação ou omissão constituem evidências de habilidades avançadas, de acordo com a opinião dos especialistas entrevistados nesta pesquisa. Tais termos possuem prioridade sobre as outras características pois são decisivos na classificação. Um axioma criado durante esta pesquisa é:

Axioma 1: “Todo literal a mais na expressão errada caracteriza supergeneralização.”

Juntamente com os termos constantes, os literais formam o conjunto de aspectos simbólicos da expressão. Os operadores que relacionam os termos algébricos e as constantes formam o conjunto de relações da expressão. Estes estão na segunda posição de prioridade na classificação. Cada operador possui uma influência diferente pois sua aplicação envolve diferentes cargas de indução analítica. Em ordem crescente de importância os operadores são organizados da seguinte forma: potenciação, multiplicação/divisão e adição/subtração/funções.

Na terceira posição de importância vem o conjunto de características semânticas e matemáticas. O conjunto semântico foi criado para representar a posição correta dos literais na expressão. Por exemplo, seja a fórmula da área de um triângulo qualquer: $A = \frac{b \times h}{2}$. A ideia aqui é identificar que a base b e a altura h estão no denominador da resposta. Porém, esse tipo de característica é de difícil processamento quando não há manipulação de equivalências algébricas, visto que podem existir diferentes posições para o mesmo literal e com a mesma semântica. Assim, foi criado outro importante axioma assumido durante a pesquisa:

Axioma 2: “Caso não exista literal na expressão correta e na errada, então a classificação é não se aplica.”

Após esta introdução sobre a conceituação dos tipos das características extraídas, as subseções seguintes irão abordar brevemente as 5 características criadas inicialmente. Para um detalhamento maior da forma de extração, objetivos e exemplos dessas 5 características, ver artigo anterior sobre a pesquisa [Marzal and Direne 2011]. Vale ressaltar que cada característica possui diferentes níveis de aplicação da carga cognitiva para lidar com indução analítica. A numeração de 1 a 5 representa esta carga, sendo o número 1 a mais alta carga.

4.1. Característica C_1

A característica C_1 expressa a diferença do número de literais das expressões. Sua extração é realizada através da fórmula $C_1 = f(E_2) - f(E_1)$, onde E_1 é a expressão

correta, E_2 é a expressão errada e f é uma função que retorna a quantidade de literais existentes na expressão. Vale ressaltar que, conforme as equivalências algébricas definidas na Subseção 3.2, é somado ao valor de C_1 todas as potências numéricas associadas aos literais. Por exemplo, seja a expressão $E_1 = \frac{n^2 \times \sqrt{3}}{4}$ e $E_2 = \frac{n^3 \times \sqrt{3}}{4}$. Logo, tem-se que $C_1 = f(E_2) - f(E_1) = 3 - 2 = 1$.

4.2. Característica C_2

A característica C_2 representa os operadores de potenciação exponencial, ou seja, o valor da potência é uma expressão que contém uma variável. Ela expressa a diferença do número de operadores de exponenciação das expressões. Sua extração é realizada através de uma fórmula semelhante à da C_1 . Por exemplo, seja a expressão $E_1 = \frac{2^n \times \sqrt{3}}{4}$ e $E_2 = \frac{2 \times \sqrt{3}}{4}$. Logo, tem-se que $C_2 = f(E_2) - f(E_1) = 0 - 1 = -1$.

4.3. Característica C_3

É a terceira característica e representa ao mesmo tempo os operadores de divisão e multiplicação. Ela expressa a diferença do número destes operadores presentes nas expressões.

4.4. Característica C_4

A característica C_4 aborda ao mesmo tempo os operadores de adição e subtração. Seu objetivo é exibir a diferença da quantidade destes operadores contidos nas expressões.

4.5. Característica C_5

Por fim a característica C_5 é a responsável por representar os erros que não possuem literais nas expressões correta e errada. É do tipo booleano e deriva do segundo axioma apresentado na seção anterior. Ela expressa a situação em que as expressões errada e coorta não podem ser identificadas como manifestações de erros de indução analítica, ou seja, a natureza do erro pode ser aritmética, algébrica, geométrica ou outras.

5. Aspectos de implementação

Nesta seção são abordados todos os aspectos relacionados à implementação do extrator de características, à coleta e rotulação da base de dados utilizada na pesquisa e, por fim, às classificações supervisionadas e não supervisionadas.

5.1. Coleta e rotulação da base de dados experimentais

A coleta dos dados foi efetuada através de software de apoio à aprendizagem de progressões geométricas [Marzal and Direne 2011]. Ele foi desenvolvido como parte desta pesquisa para oferecer uma dificuldade crescente de solução de problemas de indução analítica ao aprendiz, justamente para que sua capacidade seja explorada gradativamente. Neste software há uma sequência de exercícios, cada um deles contendo subitens que necessitam de habilidades analíticas crescentes para serem resolvidos. A Figura 1 mostra uma tela típica da situação aqui descrita.

O período de captura dos dados durou em torno de 15 dias e teve a participação de 34 aprendizes com nível de escolaridade de início da graduação (primeiro ano de Engenharia), ou seja, recém saídos do ensino médio. Ao término da coleta, foram obtidos um

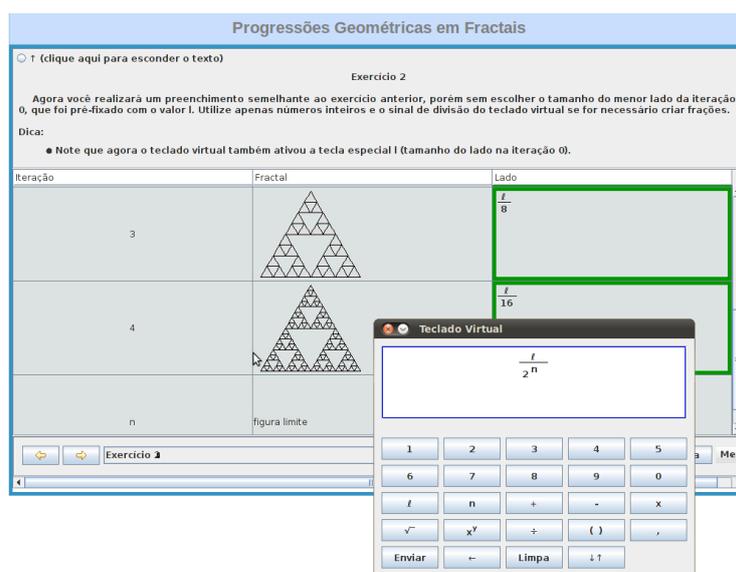


Figura 1. Tela de exercícios do software de progressões geométricas

total de 752 erros. Os erros estão armazenados em uma base relacional e disponíveis para utilização de outros pesquisadores em http://www.youse.com.br/mestrado_gustavo/DissertationSystem/src/ClusterAnalysis.php

5.2. O classificador supervisionado

O classificador escolhido para esta pesquisa foi uma rede neural, mais especificamente a rede MLP (Multilayer Perceptron). Foi utilizado o software WEKA [Bouckaert et al. 2010] como plataforma de implementação pois ele possui uma grande variedade de parâmetros de ajuste, além de utilizar aprendizagem supervisionada e o mecanismo *Back Propagation* durante a fase de treinamento. A aprendizagem ocorre através da alteração do peso das conexões entre os nós da rede após cada dado ser processado. Esta alteração é baseada na comparação entre o resultado esperado e o valor do erro gerado na saída da rede. O mecanismo de *Back Propagation* é responsável por propagar esta alteração desde a saída até entrada da rede, interferindo positivamente no processo de aprendizagem.

Dos 752 erros coletados, 376 (50%) instâncias fizeram parte do conjunto de treinamento e a outra metade, do conjunto de testes. Para preencher estes conjuntos, os dados foram selecionados aleatoriamente. No final da execução é possível gerar gráficos e obter um resumo geral da classificação realizada pela rede MLP.

5.3. Resultados obtidos

Os resultados foram obtidos através da média de 5 execuções visando eliminar possíveis ruídos e condicionamento dos dados. A acurácia média obtida foi 85% e desvio padrão de 1,97, referente aos 5 valores das médias. Isto corresponde a, em média, 329 instâncias de erros classificadas corretamente e 47 classificadas incorretamente. A acurácia máxima obtida pela rede neural MLP foi de 87%. Para se ter uma melhor visualização da classificação obtida, a Figura 2 a matriz de confusão gerada pelo classificador.

Classificação	a	b	c
a = subgen.	189	2	8
b = supergen.	9	38	16
c = não se apl.	10	2	102

Figura 2. Matriz de confusão gerada pelo classificador MLP

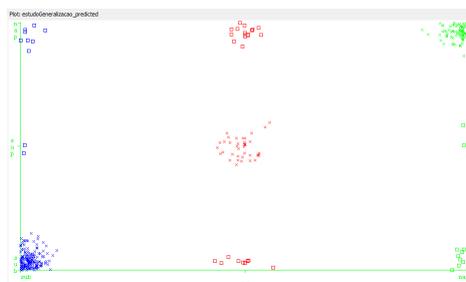


Figura 3. Classificação da rede neural MLP em dois eixos dimensionais

Na Figura 3 é possível analisar visualmente a classificação realizada pela rede neural MLP. O eixo X representa o rótulo da classe ao passo que o Y representa a classificação em si. Cada aglomerado de pontos no gráfico sugere uma classe de erro (a, b e c) da Figura 2.

6. Conclusão e Trabalhos Futuros

A identificação e explicação matemática sobre classes de erros de sub e supergeneralização de humanos foi discutida no texto. As descobertas apresentadas compõem uma forte base para o futuro projeto de modelagem dinâmica de aprendizes. A partir deste estágio, acredita-se na factibilidade de um software rastrear o conhecimento analítico do aprendiz por longos períodos de tempo. Isso poderia permitir que esse aprendiz, de fato, pudesse até corrigir seus equívocos de maneira autônoma. Outro ponto positivo está no auxílio ao professor humano, o qual pode ter a máquina como mediadora entre ele e grupos numerosos de aprendizes. Em outras palavras, o professor poderá utilizar o diagnóstico realizado pelo classificador de instâncias de erros para visualizar em qual classe de erro mais provavelmente seus alunos de enquadram. Assim como as eventuais ramificações desses erros, um aprendiz (ou de um grupo deles) poderá receber intervenção adequada e mais bem embasada.

Há diversos pontos de interação entre o aprendiz, ambiente de aprendizagem e a modelagem dinâmica que podem ser utilizados para enriquecer o diagnóstico e as mensagens de natureza corretiva. No estágio atual, tais mensagens já podem ser geradas parcialmente pelos próprios mecanismos inteligentes dos sistemas tutores inteligentes. Adicionalmente, a perspectiva de avanço da capacidade de múltiplos diagnósticos automáticos eleva cada vez mais o potencial de monitoramento e instrução programada a um patamar de destaque. Sem essas tecnologias, acredita-se que o aprendiz e o professor do futuro terão dificuldades que ainda não se revelaram hoje, devido às limitadas formas tradicionais que ainda vigoram na comunicação entre ambos.

Referências

- Ainsworth, S. (2006). Deft: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3):183–198.
- Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological Review*, (89):369–406.
- Anderson, J. R., Boyle, D. F., and Yost, G. (1985). The geometry tutor. In *IJCAI-85*, pages 1–7.
- Bouckaert, R. et al. (2010). Weka manual - university of waikato, new zealand.
- Brown, J. S. and VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, (4):379–426.
- Bull, S. and Kay, J. (2007). Student models that invite the learner in: The SMILI open learner modelling framework. *IJAIED Journal*, 17(2):89–120.
- Feitosa, A. and outros (2007). Definição formal de táticas de xadrez por meio da autoria incremental de conceitos heurísticos. In *XVIII SBIE - Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, pages 244–253, São Paulo, Brasil. SBC.
- Gobet, F. and Campitelli, G. (2006). Education and chess: A critical review. In Redman, T., editor, *Chess and education: Selected essays from the Koltanowski conference*. Chess Program at the University of Texas at Dallas.
- Graziola, P. (2009). Aprendizagem com mobilidade (m-learning) nos processos de ensino e de aprendizagem: reflexões e possibilidades. *Novas Tecnologias na Educação (CINTED)*, 7(1):1–10.
- Klock, C., Ribas, R., and Reis, A. (2010). Karma: um ambiente para o aprendizado de síntese de funções booleanas. *Revista Bras. de Informática na Educação*, 18(2):33–42.
- Lesgold, A. M. (1984). Acquiring expertise. In Anderson, J. R. and Kosslyn, S. M., editors, *Tutorials in Learning and Memory: Essays in Honor of Gordon Bower*. W. H. Freeman.
- Marzal, D. and Direne, A. (2011). Um arcabouço que enfatiza a retroação a contextos de erro na solução de problemas. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, 19(1):63–73.
- Sá, E., Teixeira, J., and Fernandes, C. (2007). Design de atividades de aprendizagem que usam jogos como princípio para cooperação. In *XVIII SBIE - Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE-2007)*, pages 607–616, São Paulo, Brasil. SBC.
- Self, J., Yr, L., and Self, J. A. (1990). Bypassing the intractable problem of student modelling.
- Sharples, M., Jeffery, N., du Boulay, B., Teather, B., Teather, D., and du Boulay, G. (2002). Socio-cognitive engineering: a methodology for the design of human-centred technology. *European Journal of Operational Research*, 136(2):310–323.
- Sison, R. and Shimura, M. (1998). Student modeling and machine learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, (9):128–158.
- Taatgen, N., Lebiere, C., and Anderson, J. (2006). *Modeling Paradigms in ACT-R*. Cambridge University Press.