

Investigando a Contribuição do Software Educativo Winplot para a Compreensão do Conceito de Função

Antônio Luiz de Oliveira Barreto, Lorena Silva Camelo, Alisandra Cavalcante Fernandes, Mauro Cavalcante Pequeno e José Aires de Castro Filho

Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem – PROATIVA. Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará. Av. Humberto Monte, s/n, bloco 901, 1º andar CEP: 60.455-760 Fortaleza – CE – Brasil

alobarreto@yahoo.com.br, lorenaufc@hotmail.com, alisandra@virtual.ufc.br,
mauro@virtual.ufc.br, aires@virtual.ufc.br

Abstract. *This study investigated the contribution of educational software Winplot in the development of the function concept. Research was conducted in a public school of Fortaleza with 13 high school students from junior year. Data consisted of interviews and observations conducted during problem solving sections mediated by the Winplot software. The following theorems-in-action were identified: distance from the vertical axis y , the function $y = x + b$ and graphs of the function $f(x) = ax + b$ with the b coefficient fixed. In conclusion, the software facilitated the understanding of these concepts by students.*

Resumo. *O presente estudo investigou a contribuição do software educativo Winplot na compreensão do conceito de função. A pesquisa foi realizada em uma escola pública de Fortaleza com 13 alunos do 1º ano do Ensino Médio. Os dados constaram de entrevistas e observações conduzidas durante a resolução de problemas mediados pelo ambiente computacional Winplot. Foram identificados teoremas-em-ação relativos à distância da reta ao eixo vertical y , à função $y=x+b$ e aos gráficos da função $f(x) = ax+b$ com o coeficiente b fixo. Concluiu-se que o software favoreceu a compreensão desses conceitos pelos alunos.*

Palavras-chave: *Ambientes Computacionais; Funções; Teoremas-em-ação.*

1. Introdução

O reconhecimento do valor da Informática no ensino de matemática vem sendo comprovado dia após dia. Uma das áreas em que o uso das tecnologias mais tem sido estudada é a álgebra. Na álgebra, o conceito de função é de grande relevância, devido ao seu papel central na Matemática do Ensino Médio e em diversas disciplinas de formação básica nos cursos de graduação em Ciências Exatas, da Saúde e Sociais Aplicadas.

Investigações de diversos pesquisadores, (DUBINSKY & HAREL, 1992; RÊGO 2000; FOSSA & FOSSA, 2000) têm mostrado que as idéias de variável, domínio, contradomínio, imagem, zeros ou raízes de uma função trazem grande complexidade para a aprendizagem dos alunos. Está aí um dos motivos importantes para se estudar mais sobre este conceito junto aos estudantes. Pesquisas recentes apontam a relevância

do computador como uma ferramenta para a aprendizagem de conceitos de funções, como observa Rêgo (2000, p.76):

“As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas idéias e conceitos e menos nos algoritmos”.

Diversos estudos com ambientes computacionais discutem a manipulação simultânea de múltiplas representações de aspectos ligados a função, tais como tabelas, gráficos e equações (Confrey, 1992, Borba, 1999). Tais trabalhos abordam, por exemplo, a manipulação dinâmica de gráficos e como isso modifica a equação de uma função.

Utilizando duas adaptações do *DynaGraph*: *DynaGraph Paralelo* e *DynaGraph Cartesiano e Function Probe*, Ferreira (1998) realizou uma pesquisa com quatro pares de estudantes brasileiros da 2ª série do Ensino Médio. Para investigação de alguns subconceitos de função, foram selecionados: conjunto imagem, periodicidade, variação, vértice e simetria axial. A pesquisadora aponta que os *software* utilizados juntamente com as atividades elaboradas em torno deles encorajaram os alunos a desenvolverem percepções, generalizações e conexões com os subconceitos estudados.

Há trabalhos também que envolvem a relação entre representações algébricas de função e situações reais tais como velocidade, saldo bancário, usando software de simulação, sensores de movimento e outros aparatos tecnológicos (Castro-Filho & Confrey, 2001).

Uma limitação dos trabalhos apresentados é que nem sempre essas investigações têm sido conduzidas em situações escolares formais. Ao contrário do que é mostrado nessa pesquisa, a qual foi inserida no âmbito escolar, em meio às práticas pedagógicas e com a expectativa de contribuir com novos instrumentos no ensino da Matemática.

Neste contexto, Barreto e Castro-Filho (2008) investigaram como o Objeto de Aprendizagem Desafio Funções podia auxiliar na aprendizagem do conceito de funções. Baseados numa análise qualitativa e quantitativa, os resultados obtidos indicaram que a utilização deste Objeto de Aprendizagem mediada pela intervenção do professor foi uma ferramenta poderosa capaz de ampliar a aprendizagem do aluno e de detectar os principais obstáculos à construção do conceito. Esse estudo tinha como objetivo geral analisar a compreensão do conceito de função através de módulos de atividades mediada por ambientes computacionais. Nesse sentido, durante a resolução das atividades envolvendo as propriedades dos gráficos de funções, fazia-se necessário estudar os conhecimentos do aluno que são subjacentes às suas condutas (teoremas-em-ação) (Vergnaud, 1993).

Dessa forma, dando seguimento a esta pesquisa, o presente trabalho propõe uma análise da compreensão do conceito de função mediada pelo ambiente computacional *Winplot* e a identificação dos teoremas-em-ação que os alunos utilizam para resolver as situações-problemas.

Para tanto, definiram-se as linhas mestras da pesquisa a partir da Teoria dos Campos Conceituais, para o qual o saber matemático forma-se a partir de problemas a resolver, isto é, momentos em que o indivíduo se encontra diante de uma situação a dominar.

Apresentaremos na seção seguinte a fundamentação teórica, seguida da metodologia utilizada na pesquisa, resultados e discussões e por fim as conclusões serão dispostas.

2. Teoria dos Campos Conceituais

A teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1993) é uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e das ações dos sujeitos nestas situações. Para Vergnaud (1993), o conhecimento matemático emerge na resolução de problemas.

Em contextos de ensino-aprendizagem, e, especificamente diante de uma tarefa matemática, o aluno deverá enquadrá-la num conjunto de circunstâncias e condições conhecidas, podendo evocar implicitamente um pensamento relevante e perceber predicados que a caracterizem. Nesse sentido, terá à sua disposição um sistema de informações que possibilitará a sua execução.

Além disso, em outros momentos, a criança, ao deparar-se com situações-problema, faz seu julgamento e escolhe uma operação ou uma sequência de operações para resolver o problema, percebendo relações que, em geral, são usadas em domínio de contextos fáceis e valores numéricos simples. Essas relações aparecem de modo intuitivo nas ações dos alunos, sendo apresentadas, na maioria das vezes, através da linguagem natural. Na teoria de Vergnaud, essas relações matemáticas são chamadas de Teorema-em-ação (MAGINA et al, 2002).

A identificação dos teoremas é ação relevante porque permite ao professor identificar o conhecimento do aluno e intervir no sentido de aprimorá-lo e não somente de corrigi-lo. Na presente investigação, usou-se os teoremas-em-ação para compreender que conhecimentos os alunos estavam apresentando enquanto resolviam as situações-problema utilizando-se do SE *Winplot*. A metodologia do estudo será descrita na próxima seção.

3. Metodologia

A pesquisa teve um caráter qualitativo, buscando entender não somente o desempenho dos alunos, mas também observar as formas com as quais resolviam os desafios propostos. O experimento foi realizado sem a participação do professor da turma.

O grupo pesquisado constituiu-se de 13 alunos do 1^a ano do Ensino Médio de uma escola pública de Fortaleza. Durante o período da pesquisa, os alunos ainda não haviam sido introduzidos ao conceito formal de função, aspecto importante para não interferir nos resultados da pesquisa.

O material usado na pesquisa envolveu um módulo de atividades e um ambiente computacional chamado *Winplot* (©Parri). O módulo de atividades continha questões que eram resolvidas pelos alunos com ou sem a mediação do computador, mas nos interessamos apenas pelas questões que envolviam a interação com o software.

O *Winplot*¹ é um programa para gerar gráficos de segunda e terceira dimensões a partir de funções ou equações matemáticas. Apresenta uma quantidade grande de ferramentas para que o aluno trabalhe com funções em espaços bidimensionais (2D), com a possibilidade de encontrar raízes, realizar combinações entre funções.

Nesta pesquisa, uma das utilizações do *Winplot* foi trabalhar com os alunos a noção de rotação das retas. Para tanto, o aprendiz deveria variar o coeficiente “a” da reta $y = ax$ e perceber os possíveis teoremas-em-ação (a relação entre o ângulo de inclinação com o coeficiente angular, interseções com os eixos, raízes ou zeros da função).

Foram realizadas atividades que contém questões sobre assuntos ligados à modelagem algébrica², às propriedades da função afim $f(x) = ax+b$ e linear $f(x) = ax$. Os sujeitos desta pesquisa trabalharam em duplas, cada par em um computador, e tiveram a mediação do pesquisador. Com o intuito de facilitar o trabalho didático, usou-se um diário de campo. Além disso, em cada sessão, uma dupla foi escolhida para ser gravada a sua atividade. Em seguida, entrevistas foram realizadas com todos os sujeitos da pesquisa, para identificar quais os teoremas-em-ação que emergiram na resolução de problemas. Todas as entrevistas foram gravadas e em seguida transcritas para posterior análise.

4. Resultados e Discussões

Nessa seção, estão descritas os teoremas-em-ação relativos ao gráfico da função do primeiro grau $f(x) = ax+b$. Na resolução das atividades relativas aos gráficos das funções do primeiro grau $f(x) = ax+b$, muitos teoremas-em-ação foram concebidos pelos alunos. Essa categoria de teoremas-em-ação está dividida em três itens: teoremas-em-ação relativos à distância da reta ao eixo vertical “y”, teoremas-em-ação relativos à função $y=x+b$ e teoremas-em-ação relativos aos gráficos da função $f(x) = ax+b$ com o coeficiente b fixo, os quais estão descritos abaixo

4.1. Teoremas-em-ação relativos à distância da reta ao eixo vertical “y”

O aluno percebe que numa família de retas $y = ax+b$, fixado o coeficiente linear “b”, e aumentando o coeficiente angular “a”, as retas vão se aproximando do eixo vertical y. Para mostrar isso, segue-se uma questão retirada do módulo de atividades e o teorema-em-ação concebida pela aluna Cristiane.

A questão pedia para traçar o gráfico das seguintes funções: $y=0.5x-1$, $y=1x-1$, $y = 1.5x-1$, $y = 2x-1$.

A aluna, utilizando o *Winplot*, pôde visualizar seguidas simulações de retas na tela do computador (figura 1). Diante desse quadro, houve um processo de negociação entre o pesquisador e a aluna, quando aquele incentivou que esta começasse a fazer uma associação entre os coeficientes angulares com os seus respectivos gráficos. A partir dessas simulações, ela pôde perceber que essas retas se interceptavam no coeficiente linear -1 e se aproximavam do eixo vertical.

¹ <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

² Meira (1997) define modelagem algébrica como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

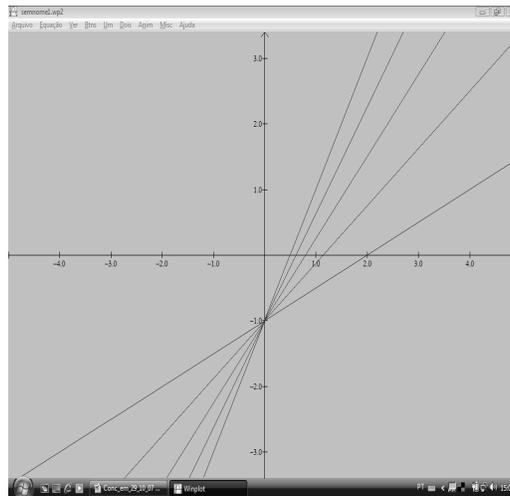


Figura 1. Família de retas $y=ax-1$ (quatro retas)

Neste processo dinâmico, ela começou a conceber um teorema-em-ação, a saber: “fixado o coeficiente linear b , quanto maior o coeficiente angular, mais as retas vão se aproximando do eixo vertical y ” (Informação verbal). De fato, fixado o coeficiente linear “ b ”, quanto maior o ângulo de inclinação, maior o coeficiente angular. Consequentemente, as retas aparentam estar se aproximando do eixo vertical y .

O ambiente computacional Winplot ajudou na aprendizagem sendo capaz de realizar rapidamente o traçado de gráficos. Através deles, a aluna se concentrou mais em perceber propriedades do que fazer técnicas rotineiras de construção de gráficos.

Esse teorema-em-ação, evocado pela aluna, é relacionado a conteúdos da Geometria Analítica, particularmente distância entre dois pontos. De fato, sejam duas retas concorrentes e não perpendiculares entre si, r_1 e r_2 , mostradas no gráfico a seguir.

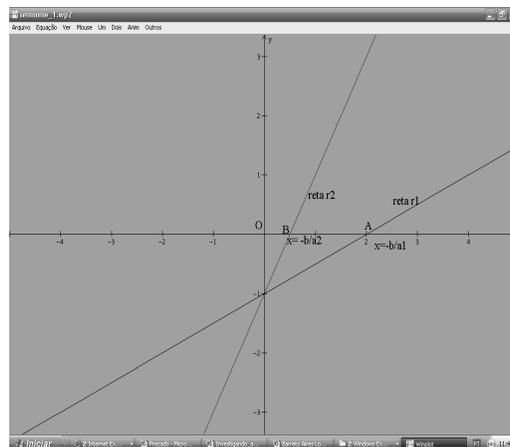


Figura 2. Duas retas que se interceptam na mesma ordenada e têm diferentes raízes

Sendo $(r_1)y = a_1x + b$ e $(r_2)y = a_2x + b$ as retas, com $b < 0$ e $a_2 > a_1$. Daí, como $b < 0$, implica $-b > 0$. Assim, $a_2 > a_1 \Rightarrow \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1} \Rightarrow -\frac{b}{a_2} < -\frac{b}{a_1} \Rightarrow \left| -\frac{b}{a_2} \right| < \left| -\frac{b}{a_1} \right| \Rightarrow \overline{OB} < \overline{OA}$,

pois calculando a distância ente a origem e o ponto $\left(-\frac{b}{a_2}, 0\right)$, temos a medida de \overline{OB} .

Reciprocamente, \overline{OA} é a distância de O ao ponto $\left(-\frac{b}{a_1}, 0\right)$.

4.2. Teoremas-em-ação relativos à função $y=x+b$

O aprendiz, ao explorar a família de retas $y = x+b$, descobre um teorema-em-ação, a saber, quando o coeficiente linear “b” for positivo, o zero ou raiz da função $y = x+b$ é negativo; por outro lado, quando “b” for negativo, o zero ou raiz da função é positivo. Esse teorema é ilustrado pela resolução da dupla de alunos Davi e Emerson à seguinte questão: Com o auxílio do *Winplot* trace o gráfico da função $y=x-1$, $y=x-2$, $y=x-3$, $y=x+1$, $y=x+2$ e $y=x+3$ e anote as suas observações.

Através do software, os alunos perceberam que, numa família de retas $y=x+b$, existe uma associação com o sinal do coeficiente linear “b”, com a abscissa do ponto de interseção dessas retas e com o eixo horizontal (figura 3). Mas durante a entrevista clínica, não explicitaram quem era esta abscissa, podendo-se observar isto nas seguintes respostas: “O encontro da reta com o x” e “É o ponto de cruzamento”.

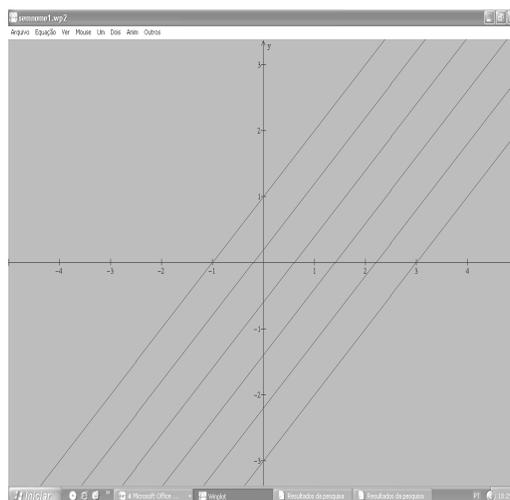


Figura 3. Família de retas $y=x+b$

Neste sentido, através da intervenção do pesquisador, desencadeou-se um processo investigativo com iniciação baseada nestas respostas, até a percepção de que esta abscissa é o zero ou raiz da função. Os aprendizes lançaram mão de um importante teorema-em-ação sobre as retas $y=x+b$: quando b for positivo, o zero ou raiz da função $y=x+b$ é negativo; por outro lado, quando b for negativo, o zero ou raiz da função é positivo.

Com efeito, o zero ou raiz da função $y=ax+b$ é $x_{\text{zero}} = -\frac{b}{a}$; mas $a=1$ e $b>0$. Assim tem-se que $x_{\text{zero}} = -\frac{b}{1} = -b < 0$. Por conseguinte, a reta intercepta o eixo x na abscissa

negativa $x=-b$. Por outro lado, quando $b<0$, a reta interceptará o eixo x na abscissa positiva $x=-b$.

4.3. Teoremas-em-ação relativos aos gráficos da função $f(x) = ax+b$ com o coeficiente b fixo

Concebendo este teorema-em-ação, o aluno descobre propriedades relativas à família de retas $y=ax+b$, onde o coeficiente angular “ a ” varia e o coeficiente “ b ” é fixo. Para mostrar isso serão apresentadas as investigações

Em uma questão do módulo de atividades pedia-se o seguinte: Qual é o sinal do coeficiente a da função $y = ax + b$ representada pelo gráfico ilustrado abaixo (figura 4)?

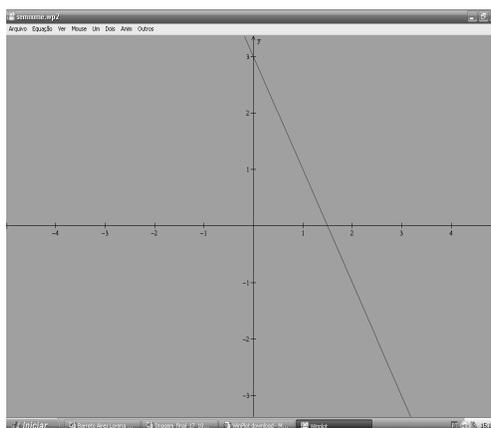


Figura 4. Gráfico $y = ax+b$

O aluno errou a resposta ao afirmar que o coeficiente “ a ” era positivo. Neste momento, incentivado pelo pesquisador, utilizando o ambiente computacional *Winplot*, faz várias simulações com a família de retas $y=ax+2$. Esse procedimento é dividido em dois momentos. No primeiro momento, ele varia o parâmetro “ a ” de 1 a 5 (figura 5). No segundo momento, varia o parâmetro “ a ” de -5 a -1. Na entrevista abaixo, observa-se o aparecimento do teorema-em-ação ora em análise.

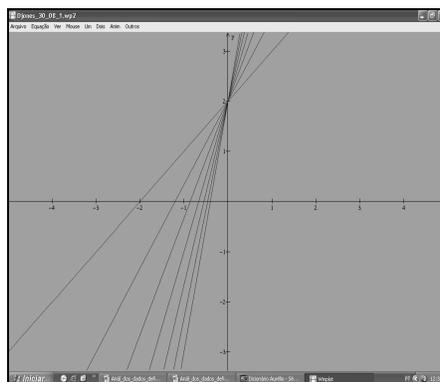


Figura 5. Família de retas $y=ax+2$ com variação do “ a ” de 1 a 5

Entrevista:

E: Qual é a diferença dessa família para outra?

A: Quando “a” é negativo vai interceptar pela direita! Quando “a” é positivo vai interceptar pela esquerda!

E: E aí a sua resposta está correta ou errada?

A: Errada, o “a” é negativo.

Sabe-se que o zero ou raiz real da função $y=ax+b$ é $x = -\frac{b}{a}$. De fato, se $y=0$

temos $ax+b=0$. Daí, segue-se que $x = -\frac{b}{a}$. Para o teorema-em-ação lançado pelo aluno

analisa-se o seguinte caso: Quando $a>0$ e $b>0$. Se $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0$.

Assim, quando o zero ou raiz da função afim é negativo e o valor do coeficiente linear “b” é positivo, a reta intercepta, respectivamente, no eixo horizontal x em uma abscissa negativa e eixo vertical y em uma ordenada positiva, “interceptando pela esquerda”. Portanto, o teorema-em-ação lançado pelo aluno está correto para $b>0$. Para o caso do coeficiente “b” negativo, a análise é análoga e foi feita e discutida com os alunos.

Esses três exemplos ilustram a potencialidade de uma aula baseada na experimentação e na coordenação das múltiplas representações de um conteúdo matemático (representação gráfica e algébrica de função). Geralmente, nas aulas tradicionais de Matemática, o estudo de funções é transmitido pelo professor através da exposição oral da teoria, seguida de exemplos e exercícios. Nestes casos, os alunos foram incentivados a investigar, a fazer experimentações antes de conhecerem uma sistematização da função afim (Borba, 1999; Borba e Pentead, 2001; Barreto e Castro-Filho, 2008). Os resultados se mostraram satisfatórios na medida em que puderam descobrir importantes propriedades desse assunto. Outras considerações sobre a pesquisa realizada serão feitas a seguir.

5. Considerações Finais

Pesquisas anteriores já mostraram a relevância de software educativos para a compreensão do conceito de função (FERREIRA, 1998; RÊGO, 2000; CASTRO-FILHO, 2001). Ao trabalhar com as múltiplas representações oferecidas pelo *software* educacional, o aprendiz tem mais possibilidades de produzir significados aos conteúdos ligados ao conceito de função, uma vez que ele pode interligar essas representações, ampliando o seu repertório de compreensão (BORBA, 1999; BARRETO; CASTRO FILHO, 2008).

Nesta pesquisa, mediados pelo ambiente computacional, alguns teoremas-em-ação foram identificados. Identificar os teoremas-em-ação utilizados pelos alunos na resolução de problemas ajuda a entender como eles constroem o conhecimento. Além disso, essas diferentes formas de raciocínios devem ser compreendidas e levadas em conta pelo professor nas horas em que estão planejando as suas aulas, pois pode tornar a sua intervenção mais eficiente.

Através dos teoremas-em-ação, o professor assumirá o papel de pesquisador, diagnosticando os conhecimentos adquiridos por seus alunos, e outros que poderão ser

desenvolvidos através de outras situações-problema ou até mesmo ampliando os já utilizados (Magina *et all*, 2001).

6. Referências

- BARRETO, A. L. O.; Castro-Filho, J.A. O Estudo de Funções Mediado Por um Objeto De Aprendizagem. In: Ii Simpósio Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática, 2008, Recife. Ii Sipemat. Anais... Recife : Programa De Pós-Graduação Em Ensino De Ciências, 2008. V. 1. P. 1-12.
- BORBA, M. C.; Penteadó M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: Bicudo, M. A. V. Pesquisa Em Educação Matemática: Concepções E Perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.
- CASTRO-FILHO, J. A.; Confrey, Jere . Interactive diagrams: investigating java-applets for learning mathematics. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DA COMPUTAÇÃO, 21., 2001, Fortaleza. Anais...Fortaleza: SBC, 2001.
- CASTRO-FILHO, J. A. Novas Tecnologias e o Ensino de Função, Taxa de Variação E Acumulação, In: Encontro Nacional De Educação Matemática, 7., 2001, Rio De Janeiro. Anais... Rio De Janeiro: Enem, 2001.
- CONFREY, J.. Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom , L. Roberts, and K. Sheingold (eds.). The year in school science 1991. (pp. 141-174). Washington , DC : American, 1992.
- DUBINSKY, E.; Harel, G. (1. The Nature Of The Process Conception Of Function, In: Dubinsky, E; Harel, G. (Ed.). The Concept Of Function - Aspects Of Epistemology And Pedagogy. [S.L]: M.A.A. Notes, 1992. V.25. P.85-106.
- FERREIRA, Verônica G. Gomes. Aproveitando o Potencial Dinâmico do Computador no Ensino De Função Matemática. Encontro De Pesquisa Educacional Do Nordeste, 13., 1998, Natal. Anais... Natal: Ufrn, 1998. V. 19, P. 37-50.
- FOSSA, John Andrew; Fossa, Maria da Glória. Funções, Equações E Regras: Ensaio Sobre A Educação Matemática. Belém, Pa: Eduepa, 2000.
- MAGINA, S. Et Al. Repensando A Adição, Subtração: Contribuições da Teoria Dos Campos Conceituais. São Paulo: Proem, 2001.
- MEIRA, Luciano L. Educação Algébrica e Resolução de Problemas: Significados E Modelagem Algébrica. 1997. Disponível Em: < [Http://Www.Tvebrasil.Com.Br/Salto](http://Www.Tvebrasil.Com.Br/Salto)>. Acessado Em 17 Fev. 08.
- RÊGO, Rogéria Gaudêncio. Um estudo sobre a construção do conceito de função. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 2000.
- VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1993, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: SIEM, 1993. p. 1-26.