

# Sistema para a Aprendizagem de Demonstrações da Geometria Euclidiana Plana - LEEG

MÁRCIA RODRIGUES NOTARE<sup>1</sup>

TIARAJÚ ASMUZ DIVERIO<sup>2</sup>

**RESUMO:** O presente artigo apresenta o sistema para a aprendizagem de demonstrações da Geometria Euclidiana Plana LEEG (*Learning Environment on Euclidean Geometry*). Esse sistema foi formalizado e implementado sobre o protocolo de aprendizagem MOSCA (Mestre + Oráculo + Sonda + Cliente + Aprendiz), formado por cinco agentes distintos, que interagem durante o processo de construção do conhecimento, com o objetivo de promover a aprendizagem das demonstrações geométricas desenvolvidas por Euclides.

**PALAVRAS-CHAVE:** ambientes de aprendizagem informatizados, aprendizagem de Matemática, demonstrações geométricas.

## A System for Learning Demonstrations in Plane Euclidean Geometry - LEEG

**ABSTRACT:** This article presents the learning system for Euclidean Plan Geometry demonstration LEEG (*Learning Environment on Euclidean Geometry*). This system was formalized and implemented by using MOSCA learning protocol (Mestre + Oráculo + Sonda + Cliente + Aprendiz, in English, Master, Oracle, Probe, Client and Apprentice), that was formed by five distinct agents. This agents interact during the knowledge construction process, in order to promote the learning of geometric demonstrations, developed by Euclid.

**KEYWORDS:** computer-based learning environment, mathematics learning, geometric demonstration.

### 1 INTRODUÇÃO

A Geometria pode ser vista sob dois aspectos principais, especialmente no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem: considerada como uma ciência que estuda as representações do espaço e considerada como uma estrutura lógica, onde a estrutura matemática é representada e tratada no mais alto nível de rigor e formalismo [1]. Ambos os enfoques citados acima devem ser trabalhados e desenvolvidos no processo escolar.

Entender a Geometria como uma ciência do espaço é fundamental para o entendimento do mundo real, para a compreensão e ampliação da percepção do espaço e para a representação e visualização de partes do mundo que nos cerca, uma vez que estabelece as relações existentes no plano e no espaço. Por outro lado, compreender sua estrutura rígida e perfeita, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, desenvolve habilidades de argumentação lógica, de expressão escrita e de precisão da linguagem.

Entretanto, o ensino e aprendizagem da Geometria, nos últimos anos, abandonou quase que totalmente sua abordagem dedutiva. Demonstrações de teoremas geométricos não são mais trabalhadas na maioria das escolas brasileiras, o que repercute num ensino falho da Matemática, que não valoriza o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas

---

<sup>1</sup> Profa. Msc. do Departamento de Informática da Universidade de Caxias do Sul - CCET/DEIN/UCS

<sup>2</sup> Prof. Dr. do Instituto de Informática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - II/UFRGS

à experimentação, observação e percepção, realização de conjecturas, desenvolvimento de argumentações convincentes, entre outras.

Por outro lado, vem-se observando a acelerada evolução dos sistemas de ensino informatizados, que visam promover, auxiliar e motivar a aprendizagem das mais diversas áreas do conhecimento, utilizando técnicas de Inteligência Artificial para se aproximarem ao máximo do comportamento de um tutor humano que se adapte e atenda às necessidades de cada aluno.

Levando-se em conta este cenário, desenvolveu-se um sistema para a aprendizagem de demonstrações geométricas - LEEG (*Learning Environment on Euclidean Geometry*), tendo como objetivo auxiliar um aprendiz na construção de demonstrações da Geometria Euclidiana Plana. As demonstrações oferecidas pelo sistema são as mesmas desenvolvidas por Euclides no primeiro dos treze livros da obra *Elements* (Fundamentos da Geometria Plana) [6] e [8].

Optou-se por considerar as demonstrações desenvolvidas por Euclides, por serem demonstrações que priorizam e valorizam a utilização de objetos geométricos no seu desenvolvimento, fugindo das demonstrações que apelam para a simples manipulação algébrica e que não oferecem uma construção significativa do ponto de vista da Geometria.

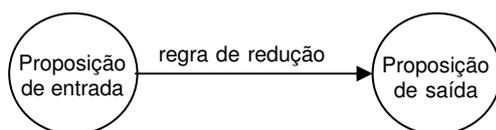
Porém, mesmo sendo consideradas apenas as demonstrações contidas em *Elements*, todos os diferentes raciocínios para uma mesma demonstração estão previstos na base de conhecimento do sistema, dando liberdade ao aprendiz no processo de construção da demonstração.

## 2 DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

Várias são as técnicas de demonstração utilizadas para provar teoremas: prova direta ou dedutiva, prova por contraposição, prova por redução ao absurdo e prova por indução. No caso da Geometria Euclidiana no contexto deste trabalho, interessa apenas o estudo da técnica de prova direta ou dedutiva. Neste tipo de prova, pressupõe-se verdadeira a hipótese e, a partir desta, prova-se ser verdadeira a tese.

A construção de uma demonstração dedutiva pode ser associada a, basicamente, duas representações: grafo e textual.

Na primeira representação, tem-se um grafo orientado, onde cada nodo é associado a um enunciado da demonstração e cada aresta associa um enunciado a outro (regra de dedução). Dessa forma, a representação de uma demonstração sobre a forma de um grafo permite que sua construção mantenha subjacente a estrutura



lógica-dedutiva dos enunciados.

No grafo, é possível identificar facilmente as relações existentes entre os enunciados, assim como o sentido dessas relações. Outro fator importante é o fato de que na demonstração construída num grafo, pode-se visualizar tanto o enunciado do teorema quanto sua prova (enxergam-se a inferência e o encadeamento). A Figura 1 apresenta a representação de uma demonstração na forma de grafo.

FIGURA 1 - Grafo de uma demonstração dedutiva

A representação textual de construção de uma demonstração dedutiva é a forma que possui maior proximidade com o rigor matemático. É desenvolvida sequencialmente e todos os enunciados devem ser justificados, apresentando coerência e lógica dedutiva. A justificativa para a inclusão de cada enunciado é equivalente à regra de dedução no grafo, que permite a passagem de um enunciado a outro. Ambas as formas de representação - grafo e texto - são equivalentes e válidas para a prova dedutiva de teoremas.

Entretanto, a aprendizagem de construção de demonstrações dedutivas não é trivial. A elaboração de uma demonstração exige uma organização particular de conhecimentos. Conhecimento este que deve constituir um conjunto fortemente hierarquizado de definições, teoremas e regras de dedução, fundamentado no rigor matemático [12].

O processo que leva da experimentação à construção intelectual de uma demonstração dedutiva implica num nível mental de abstração, dedução e rigor muitas vezes não atingido por grande parte dos alunos. Dentro desta perspectiva, pesquisas revelaram que a utilização de pequenas *dicas* auxiliam os alunos a avançarem no processo de elaboração de uma demonstração geométrica [11]. Tais dicas, ajudam principalmente alunos a estabelecerem relações entre os enunciados que compõem uma demonstração.

Estas considerações foram relevadas no processo de concepção do sistema aqui proposto.

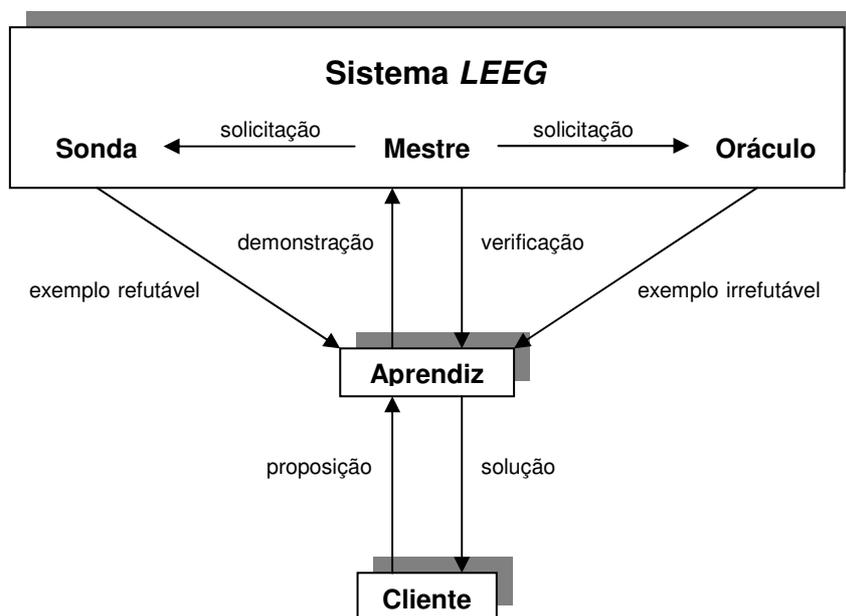
### 3 CONCEPÇÃO DO LEEG

O sistema LEEG foi desenvolvido sobre uma adaptação do protocolo de aprendizagem MOSCA [2], proposto para estabelecer um ambiente de aprendizagem informatizado.

Este protocolo de aprendizagem é composto por cinco agentes distintos - Mestre, Oráculo, Sonda, Cliente e Aprendiz - que podem ser considerados como entidades humanas ou artificiais, dependendo da aplicação e do objetivo. Tais agentes possuem comportamentos específicos, estabelecidos pelos papéis que cada agente deve assumir no processo de aprendizagem. Os cinco agentes interagem durante o processo de construção e evolução do conhecimento, compondo um ambiente baseado na aprendizagem interativa através da utilização de exemplos e contra-exemplos.

Alguns trabalhos já utilizaram o protocolo MOSCA na concepção de ambientes [3], [4] e [5], mas o que se propõem é uma nova abordagem de utilização, que considera os agentes Aprendiz e Cliente como entidades humanas e os agentes Mestre, Oráculo e Sonda como entidades artificiais [7].

A Figura 2 apresenta o esquema de comunicação e interação do protocolo MOSCA



adaptado para o LEEG.

FIGURA 2 - Protocolo MOSCA no LEEG

### 4 DESCRIÇÃO DO LEEG

As demonstrações dedutivas que são desenvolvidas na interface do LEEG estão representadas pela forma textual, organizadas em uma tabela constituída de duas colunas nomeadas *Enunciado* e *Regra de Dedução*, nas quais o Aprendiz deverá desenvolver sua

demonstração dedutiva. Para cada campo da coluna de enunciados, terá um campo equivalente na coluna de regra de dedução, que deverá ser rigorosamente preenchido pela regra de dedução que conclui o respectivo enunciado. Somente a hipótese do teorema pode ter este campo não preenchido.

As regras de dedução aceitas pelo LEEG são as 23 definições, os 5 axiomas e os 5 postulados da Geometria Plana de Euclides.

Para um melhor esclarecimento sobre o desenvolvimento de demonstrações dedutivas, apresenta-se a seguir a demonstração da Proposição 1 na representação textual (Tabela 1), que ilustra apenas um dos possíveis raciocínios que levam à construção correta da demonstração.

A nomeação dos objetos geométricos é necessária para que o Mestre acompanhe o desenvolvimento da demonstração. Porém, o Aprendiz tem liberdade para nomear os objetos com qualquer caractere, não precisando obedecer a nenhuma ordenação ou nomenclatura pré-estabelecida pelo sistema.

**Proposição 1:** *Construir um triângulo equilátero sobre um segmento de reta dado.*

TABELA 1 – Representação textual da demonstração da Proposição 1

Enunciado	Regra de Dedução
segmento AB	(Hipótese)
círculo A, AB	Postulado 3 (A, AB)
círculo B, AB	Postulado 3 (B, AB)
ponto C	Interseção ((círculo A, AB), (círculo B, AB))
segmento AC	Postulado 1 (A, C)
segmento BC	Postulado 1 (B, C)
segmento AC = segmento AB	Definição 15 (AC, AB)
segmento BC = segmento AB	Definição 15 (BC, AB)
segmento AC = segmento BC	Axioma 1 (AB, AC, BC)
triângulo ABC = equilátero	Definição 20 (AB, AC, BC)

## 5 OS AGENTES

Uma descrição dos papéis assumidos por cada um dos agentes no sistema é apresentada a seguir:

- **Mestre** - é o agente que constantemente acessa a construção da demonstração que está sendo desenvolvida pelo Aprendiz, verificando a sua estrutura. A verificação da aprendizagem é feita através da comparação entre a estrutura desenvolvida pelo Aprendiz e a estrutura contida na base de conhecimento do sistema. Essa comparação é feita passo a passo, a cada novo enunciado e regra de dedução incluídos na demonstração. Quando há um isomorfismo entre as estruturas, diz-se que a aprendizagem é efetuada. O Aprendiz é incentivado a passar a um novo estágio.
- **Oráculo** - é o agente que, em conformidade com as sinalizações do Mestre, interage com o Aprendiz através de exemplos irrefutáveis, objetivando dar subsídios para o Aprendiz formular enunciados e estabelecer as ligações entre eles, durante o processo de elaboração da demonstração. Os exemplos são armazenados em uma base de exemplos. A seleção dos exemplos é determinada pela sinalização do Mestre, que identifica o estágio da demonstração e o erro cometido pelo Aprendiz.
- **Sonda** - o agente Sonda tem a função de enviar ao Aprendiz, de acordo com as solicitações do Mestre, exemplos que podem ser refutados. Estes exemplos são enviados quando o Mestre identifica erros de ligação entre os estados da demonstração ou nas afirmações produzidas pelo Aprendiz. Com os contra-exemplos, o Aprendiz deve refazer

o passo da construção onde foi identificado o erro para poder prosseguir com a demonstração.

- **Cliente** - é o agente que inicia o processo através da submissão de uma das possíveis proposições ao agente Aprendiz que deve ser demonstrada. O acesso à base de proposições pode ser efetuado de duas maneiras: ordenada ou randômica. Essas duas formas estabelecem duas abordagens na construção das demonstrações dedutivas. A primeira consiste em um *raciocínio indutivo*, ou seja, não são propostas ao Aprendiz proposições que exijam resultados de proposições ainda não demonstradas. A segunda abordagem caracteriza-se por um *raciocínio recursivo*, ou seja, podem ser propostas proposições que dependem do resultado de outras proposições que ainda não foram provadas pelo Aprendiz.
- **Aprendiz** - o agente Aprendiz recebe do Cliente uma proposição para ser demonstrada. Numa proposição, deve-se identificar a hipótese e a tese. No caso de provas dedutivas, a demonstração deve partir da hipótese, que é admitida como verdadeira, e provar a tese, através de uma seqüência lógica de enunciados que devem ser rigorosamente justificados. O papel do Aprendiz é exatamente este: provar ser verdadeira a tese da proposição que foi submetida a ele, através de uma seqüência de afirmações justificadas. Cada passo do seu raciocínio é acompanhado pelo agente Mestre, que interrompe o processo sempre que identifica um erro de afirmação ou ligação, e solicita dos agentes Oráculo e Sonda a emissão de exemplos ou contra-exemplos, dependendo da situação identificada. Se sua demonstração for isomorfa a uma das estruturas desenvolvidas na base de conhecimento do sistema, então a aprendizagem esta efetuada.

## 6 COMUNICAÇÃO ENTRE OS AGENTES

Os agentes Oráculo e Sonda comunicam-se com o Aprendiz através de mensagens contendo dicas, que podem ser enviadas durante a construção das demonstrações.

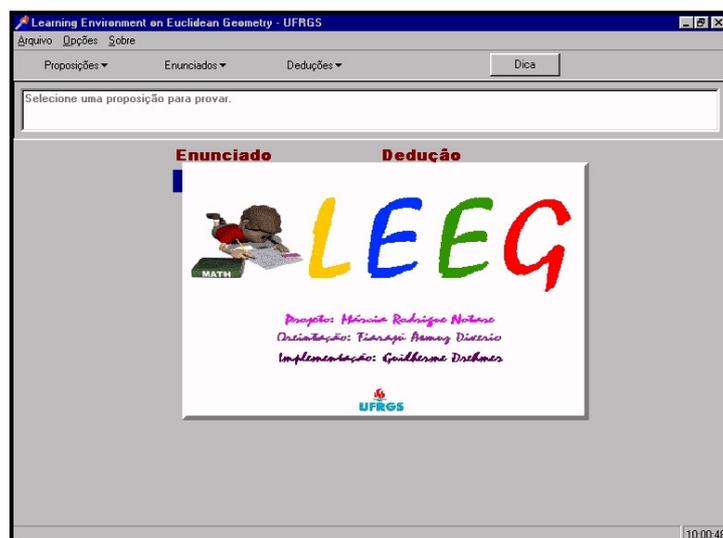
Estas mensagens estão classificadas em três grandes grupos: *Mensagens de Correção*, *Mensagens de Incentivo* e *Mensagens de Reflexão* [9]. As duas primeiras categorias de mensagens são de responsabilidade do Oráculo, enquanto que a terceira categoria é de responsabilidade do Sonda.

As mensagens de correção são disparadas mediante identificação de erro nas regras de dedução do Aprendiz e têm como objetivo fornecer dicas que alertem o Aprendiz sobre o erro e encaminhem sua correção.

Já as mensagens de incentivo, são disparadas mediante a constatação de dois fatos simultâneos: enunciado e respectiva regra de dedução corretos e ausência de ação do Aprendiz por um tempo pré-estabelecido. Essas mensagens têm o objetivo de incentivar o Aprendiz a prosseguir com a demonstração quando percebe-se indecisão ou abandono, apresentando dicas relativas ao próximo estado da demonstração.

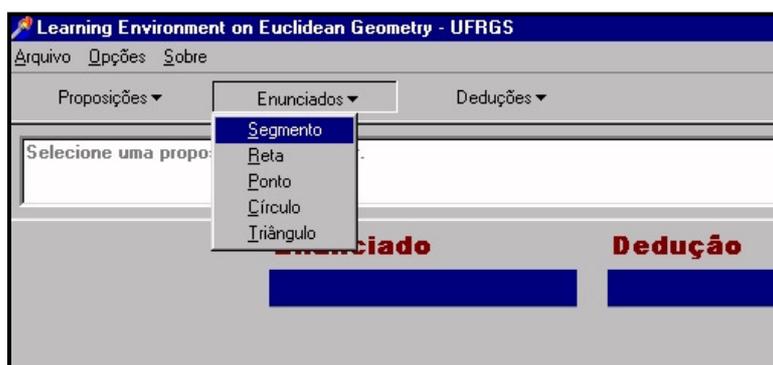
Por fim, têm-se as mensagens de reflexão, que são disparadas apenas nas situações em que Aprendiz comete erros de enunciado. Elas têm como objetivo alertá-lo sobre o erro cometido, criando situações que provoquem incerteza, para que o Aprendiz reflita sobre o enunciado concluído, refazendo sua construção.

## 7 PROTÓTIPO LEEG



Como resultado deste trabalho, desenvolveu-se a primeira versão de um protótipo do sistema LEEG (Figura 3), visando validar as idéias propostas e analisar a qualidade e aplicabilidade do sistema.

FIGURA 3 - Tela de abertura do LEEG



Para essa versão, foram implementadas as duas primeiras proposições da Geometria Euclidiana Plana, suficientes, nesse primeiro momento, para avaliar o sistema. Os enunciados (elementos geométricos básicos) utilizados na demonstração dessas duas proposições estão disponibilizados em um componente de diálogo, como mostra a Figura 4.

FIGURA 4 - Enunciados disponibilizados

Todas as regras de dedução da Geometria Euclidiana Plana também estão disponibilizadas em um componente de diálogo na interface do LEEG, apresentando, na barra de *status* (área horizontal localizada logo abaixo da janela principal) informações referentes ao significado e aplicação de cada regra (Figura 5).

As dicas são enviadas através de uma janela de mensagens, sempre que situações de erro são identificadas pelo Mestre. As mensagens de incentivo podem ou não estar habilitadas, ficando a critério do professor esta opção. A Figura 6 mostra uma interação durante o desenvolvimento da demonstração da Proposição 1.

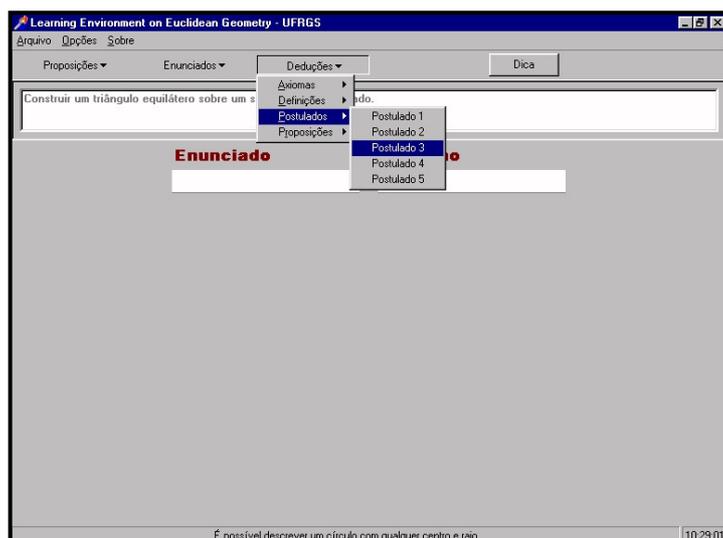


FIGURA 5 - Deduções disponibilizadas e respectivas informações

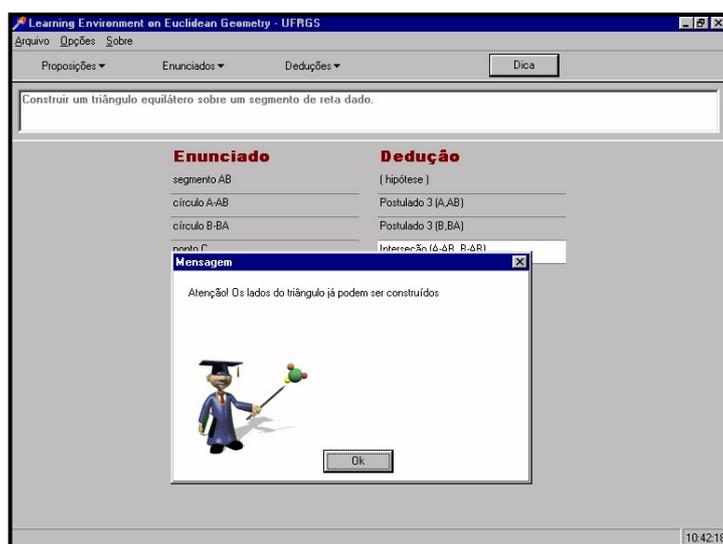


FIGURA 6 - Exemplo de interação através de uma mensagem de incentivo

O protótipo desenvolvido é um sistema de fácil utilização, onde a nomenclatura utilizada é a habitualmente utilizada em Geometria (ponto, reta, axioma, postulado, etc.).

## 8 CONCLUSÕES

Este trabalho é resultado de uma primeira versão do protótipo do sistema para a aprendizagem de demonstrações geométricas LEEG (*Learning Environment on Euclidean Geometry*), que tem como objetivo principal auxiliar o Aprendiz na elaboração de demonstrações dedutivas da Geometria Euclidiana Plana.

Optou-se pelas demonstrações feitas por Euclides, por serem demonstrações totalmente desenvolvidas através do pensamento geométrico, que utilizam elementos básicos da geometria (ponto, reta, círculo,...) e construção elementares com régua e compasso para desenvolver, de forma surpreendente, toda a Geometria que é conhecida e estudada até os dias de hoje.

Como já mencionado anteriormente, os software até então desenvolvidos, constróem provas que apelam para a total manipulação algébrica. Apesar da extrema importância destes software, seus objetivos são outros: o desenvolvimento de sistemas capazes de produzir provas de teoremas da Geometria, mas que não têm preocupação com o processo de ensino e aprendizagem.

A proposta deste trabalho foi desenvolver um sistema que ofereça condições para a aprendizagem e construção de demonstrações de teoremas da Geometria por aprendizes humanos.

Os trabalhos futuros apontam para uma avaliação criteriosa do sistema, que considere aspectos técnicos e pedagógicos, com o objetivo de dar continuidade ao trabalho. Assim, será possível repensar interface, formas de interação sistema/aprendiz, qualidade e eficiência das mensagens enviadas, entre outros. Uma vez repensado o sistema, pretende-se implementar as demais proposições e ampliar os recursos oferecidos.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Hershkowiks, R. (1994). *Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria*. Boletim GEPEN (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), nº 32, p.3-31.
- [2] Reitz P. (1992). *Contribution à l'étude des environnements d'apprentissage: Conceptualisation, Spécifications et Prototypage*. Université des Sciences et Techniques du Languedoc Montpellier II, Montpellier. Thèse de Doctorat.
- [3] Costa E., Lopes M., Ferneda E. (1995). *Mathema: A Learning Environment based na a Multi-Agent Architecture*. 12 Brazilian Symposium on Artificial Intelligence, Advances in Artificial Intelligence, p.141-149.
- [4] Ferneda E. (1992). *Conception d'un Agent rationnel et examen de son raisonnement en géométrie*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc Montpellier II, France.
- [5] Luengo V. (1996). *Um Micromundo para la Resolución de Problemas de Demonstración en Geometría*. Conferencia Latino-Americana de Informática, Colômbia, p.941-952.
- [6] Euclid. (1978). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. (Translation by Heath T.T.) Dover Publications, New York.
- [7] Notare M.; Divério T. (2001). *Aprendiz's Learning in Geometry Demonstration*. 7 World Conference on Computer in Education, Copenhagen, Denmark. (to appear).
- [8] Joyce, D.E. (1998). *Euclid's Elements*. Disponível em: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> (Acesso em 11 abr.2000)
- [9] Notare M., Machado J. Diverio T., Blauth P. (2001) *Knowledge Anticipation on Agents Relationship in the Geometry Proof System*. Fifth International Conference on Computing Anticipatory Systems, Liège, Belgium. (to appear)
- [10] Machado J.P., Notare M.R., Costa S., Diverio T.; Menezes P.B. (2001). *Hyper-Automaton System Applied to Geometry Demonstration Environment*. Eighth International Conference on Computer Aided Systems Theory and Technology, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, p.136-139 (to appear in LNCS 2178).
- [11] Zykova, V. (1950). *Operating with Concepts when Solving Geometry Problems*. Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, v.28, p.155-194.
- [12] Balacheff, N. (1998). *Apprendre la Preuve*. CNRS: Laboratoire Leibnitz, IMAG, Grenoble. URL <http://www-cabri.imag.fr/Preuve/> (22 set. 1998)